

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

На правах рукопису
УДК 517.9:621.3

До захисту допущено
В. о. завідувача кафедри ММСА
О.Л.Тимошук

«__» _____ 2018 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра за спеціальністю 124 Системний аналіз
на тему: «Системні задачі оптимізації акустичних полів»

Виконав:

студент II курсу, групи КА-71 мп
Якубович Віктор Петрович

Керівник: професор кафедри ММСА
доктор технічних наук Данилов В.Я.

Рецензент: Професор НТУУ «КПІ»
доктор технічних наук Качинський А.Б.

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань
Студент _____

Київ
2018

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Рівень вищої освіти — другий (магістерський)

Спеціальність (спеціалізація) — 124 «Системний аналіз» («Системний аналіз і управління»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

В. о. завідувача кафедри ММСА

О. Л.

Тимощук

«___» _____ 2018 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту Якубовичу Віктору Петровичу

1. Тема дисертації: «Системні задачі оптимізації акустичних полів», науковий керівник дисертації Данилов В.Я., доктор технічних наук, професор, затверджені наказом по університету від «07» листопада 2018 р. № 4121-с

2. Термін подання студентом дисертації: _____

3. Об'єкт дослідження: методи створення оптимальних звукових полів із заданими властивостями в неоднорідних океанічних хвильоводах різної конфігурації.

4. Предмет дослідження: методи та алгоритми створення акустичних полів із заданими властивостями в вибраних областях океанічних хвильоводів.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

- 1) Огляд технічної літератури за темою роботи;
- 2) Дослідження актуальності обраної теми;
- 3) Вибір методів та алгоритмів створення акустичних полів;
- 4) Збір вхідних даних;
- 5) Виконання обчислювальних експериментів;
- 6) Аналіз результатів;
- 8) Підготовка ілюстративного матеріалу;
- 9) Оформлення пояснювальної записки.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:

- 1) Постановка завдання дослідження;
- 2) Методи створення оптимальних звукових полів;
- 3) Створення оптимальних звукових полів;
- 4) Аналіз результатів.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

8. Дата видачі завдання: _____

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Отримання завдання на дипломну роботу	07.09.2018 – 09.09.2018	
2.	Огляд технічної літератури за темою	10.09.2018 – 30.09.2018	
3.	Дослідження актуальності обраної теми	01.10.2018 – 07.10.2018	
4.	Вибір методів для моделювання і прогнозування	08.10.2018 – 14.10.2018	
5.	Збір вхідних даних	15.10.2018 – 21.10.2018	
6.	Виконання обчислювальних експериментів	22.10.2018 – 28.10.2018	
7.	Аналіз результатів моделювання і прогнозування	29.10.2018 – 04.11.2018	
8.	Проведення аналізу ринкових можливостей запуску стартап-проекту	05.11.2018 – 11.11.2018	
9.	Підготовка ілюстративного матеріалу	12.11.2018 – 18.11.2018	
10.	Оформлення пояснювальної записки	19.11.2018 – 26.11.2018	

Студент

Якубович В.П.

Науковий керівник дисертації

Данилов В.Я.

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 137 с., 88 рис., 42 табл., 25 джерел.

Актуальність теми: Інтенсивний розвиток океанології обумовлений зростанням питання охорони природи та навколишнього середовища, підводної оборони країн та іншими глобальними задачами. Дослідження акустичних полів дозволить впровадити більш точну систему отримання необхідних звукових полів та їх параметрів на заданих відстанях для: акустичного зондування; складання топології дна; визначення координат рухомих невідомих джерел (човни, кораблі, косяки риб) і т.п.

Мета дослідження – розробка структури СППР, моделювання та прогнозування бізнес-процесів для сфери реклами.

Об'єкт дослідження – методи створення оптимальних звукових полів із заданими властивостями в неоднорідних океанічних хвильоводах різної конфігурації.

Предмет дослідження – методи та алгоритми створення акустичних полів із заданими властивостями в вибраних областях океанічних хвильоводів.

Методи дослідження – методом дослідження звукових полів на основі еліптичної апроксимації рівняння Гельмгольца є параболічне наближення. Наукова новизна: комплексний огляд масиву даних для побудови якісної стратегії для медіаринку.

АКУСТИЧНІ ПОЛЯ, ГІДРОАКУСТИКА, ОКЕАНОГРАФІЯ,
ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ, АМПЛІТУДНО-ФАЗОВЕ КЕРУВАННЯ

ABSTRACT

Master's dissertation: 137 pp., 88 rice, 42 tables, 25 sources.

Subject relevance: intensive development of oceanology is due to the growing issue of nature conservation and the environment, underwater defense of countries and other global challenges. The study of acoustic fields will allow us to introduce a more precise system for obtaining the required sound fields and their parameters at given distances for: acoustic sensing; compilation of topology of the bottom; determination of the coordinates of moving unknown sources (boats, ships, shoals of fish), etc.

The purpose of the research is to develop a DSS structure, modeling and forecasting of business processes for advertising.

The object of the research - the methods of creating optimal sound fields with given properties in non-uniform oceanic waveguides of different configurations.

The subject of the research is the methods and algorithms for creating acoustic fields with given properties in selected areas of ocean waveguides.

Research methods - the method of study of sound fields on the basis of the elliptic approximation of the Helmholtz equation is a parabolic approximation. The novelty of the novel: a comprehensive review of the data array to build a quality strategy for the media market.

ACOUSTIC FIELDS, HYDROACOUS, OCEANOGRAPHY, PARABOLIC EQUATIONS, AMPLITUDE PHASE MANAGEMENT

Зміст

РЕФЕРАТ	4
ВСТУП.....	8
РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ МОДЕЛІ ХВИЛЕВОДІВ	9
1.1 Проблеми та перспективи системного вивчення океану	9
1.2 Основні концепції системного аналізу	15
1.3 Основні рівняння теорії звукових хвиль та деякі допоміжні співвідношення	20
1.3.1 Об'ємні розподілені джерела.....	26
1.3.2 Поверхневі розподілені гармонічні джерела	30
1.3.3 Лінійні розподілені гармонічні джерела	32
1.3.4 Точкові джерела с комплексними амплітудами	34
1.3.5 Поле протяжного джерела в регулярному хвилеводі океану.....	36
1.4 Аналітичні розв'язки просторових хвильових задач для рівняння Гельмгольца	44
1.4.1 Акустичне поле кулі	45
1.4.2 Звукове поле об'ємного циліндра	50
1.4.3 Поле об'ємного шару.....	55
1.5 Розв'язування хвильових рівнянь в областях з імпедансною границею методом нормальних мод	60
1.5.1 Неоднорідний осесиметричний хвилевід з імпедансною границею	61
1.5.2 Неоднорідний осесиметричний хвилевід з поглинанням на границі вода-дно	69
1.6 Метод параболічного рівняння (параболічні наближення)	72
1.6.1 Основні ідеї методу	72
1.6.2 Виведення параболічних рівнянь	78
РОЗДІЛ 2 ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ В ГІДРОАКУСТИЦІ	87
2.1 Про активне гасіння звуку з обмеженою частотою у хвилеводах	87
2.2 Оптимальне амплітудно-фазове керування звуковими полями	96
2.3 Чисельні розв'язки задач	103
2.3.1 Задача амплітудно-фазового керування з параболічним наближенням	103
2.3.1.1 Різницеві схеми для рівнянь параболічного типу	103
2.3.1.2 Постановка задачі	107
2.3.1.3 Розв'язок	109

2.3.2 Задача амплітудного керування	111
2.3.2.1 Постановка задачі	111
2.3.2.2 Розв’язок	114
РОЗДІЛ 3 РОЗРОБЛЕННЯ СТАРТАП-ПРОЕКТУ	116
3.1 Опис ідеї проекту	116
3.2 Технологічний аудит ідеї проекту	117
3.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту	118
3.4 Розроблення ринкової стратегії проекту	125
3.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту	129
Висновки за розділом 3	132
ВИСНОВКИ	133
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	134

ВСТУП

Задачам оптимізації в гідроакустиці на сьогоднішній день присвячено незначне число робіт, що пояснюється перш за все складністю як математичних моделей гідроакустичних полів, так і складністю самих задач керування звуковими полями[9,10,13,14]. Тому робота складається з двох частин: в першій на основі системного підходу проведено структурування моделей, що включає в себе диференціальне рівняння та граничні умови для різних типів хвильоводів; в другій частині розглянуті природні задачі керування з допомогою точкових, лінійних та розподілених керованих джерел[1,2,7,12]. При цьому розглядаються задачі створення звукових полів з властивостями, які близькі до заданих в певних метриках (за заданим полем, за заданим модулем поля, за заданою енергією і т.п.). Оптимальним керуванням може служити або амплітуда і фаза випромінюючих джерел, або амплітуда, або лише фаза. При цьому на випромінюючі джерела додатково накладаються обмеження як по амплітуді, так і по фазі, так і по енергії.

З допомогою методів оптимального керування системами з розподіленими параметрами в роботі, для кожної з виділених раніше задач побудовані алгоритми знаходження наближених розв'язків градієнтними процедурами. Для параболічних наближень до моделі Гельмгольца побудовані зручні градієнтні процедури чисельної оптимізації.

Зауважимо, що вибираючи задане поле спряженим до поля точкового джерела одержимо задачу оптимізації, яка розв'язується на основі методу обернення хвильового фронту (в оптиці). На основі принципу фазового спряження даний розв'язок задачі про фокусування поля в заданій точці усередині однорідного хвильоводу. Зазначено спосіб визначення координат джерела за допомогою поля, створеного на антені. Розраховано фокусування поля на різних частотах, положеннях антени, різних відстанях від випромінюючої апертури.

РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ МОДЕЛІ ХВИЛЕВОДІВ

1.1 Проблеми та перспективи системного вивчення океану

Обмежені можливості отримання інформації щодо динаміки реального океану висунули проблему правильного формулювання самих цілей досліджень, перевірки їх досяжності, обґрунтування конкретних методів включення даних досліджень у теоретичні моделі. Стало очевидним, що розв'язок проблеми спостереження за динамікою полів океану можливий лише на основі системного підходу.

Для практичної реалізації методології системного аналізу необхідні океанологічні інформаційно-обчислювальні системи. Вони повинні об'єднувати джерела інформації про океан (дистанційні та контактні засоби вимірів, архіви спостережень чи банки даних), програмне забезпечення, що реалізує чисельні моделі із засвоєнням даних, засоби управління збором, обробкою та відображенням інформації. Основні концепції системного аналізу повинні забезпечити розробку методології побудови та використання подібних систем. Оптимізація інформаційних систем за критеріями точності відтворення динаміки океану, легкості здійснення, вартості та іншим параметрам забезпечує підвищення ефективності досліджень(контролю).

У сучасній океанології, як і в будь-якій науці що інтенсивно розвивається, існує дві загальні тенденції. Одна з них полягає у спеціалізації окремих напрямів у вивченні океану, до якої неухильно приводить заглиблення у специфіку гідрофізичних процесів. Друга тенденція веде до об'єднання, синтезу знань, накопичених у різних напрямках океанології та в інших природничих і технічних науках. Проблеми довгострокового прогнозу погоди, раціонального використання біологічних ресурсів, контролю за забрудненням океану, забезпечення навігації суден, що стоять перед океанологією, вимагають для свого розв'язку комплексного освоєння всіх відомостей, що маютьс'я в наявності, методами математики, фізики, техніки та інших наук.

Дослідник повинен вирішити, чи може факт, подія або інформація стати суттєвою частиною для створення цілісного образу природного об'єкту, чи ні. Найважливішим поняттям, що сприяє розв'язанню цього питання є поняття системи. Система представляє собою таке об'єднання елементів, яке забезпечить органічне ціле. А отже, елементом системи може бути тільки такий факт, явище, інформація, які задовольняють умові цілісності системи. Всі інші елементи, що не включаються у систему, відносяться до зовнішньої середовища тобто протистоять системі.

Приймаючи за ознаку цілісності здатність системи відображати гідрофізичні процеси певних просторово-часових масштабів, ми приходимо до поняття гідрофізичної системи.

Конкретний зміст поняттю цілісності системи дає формулювання мети досліджень. Поставлена мета визначає, яку інформацію необхідно отримати у процесі досліджень. Отже, системотворчим фактором може виступати інформація відносно поставленої мети. В склад інформаційної системи будуть включені тільки ті елементи, які містять таку інформацію і можуть сприяти досягненню мети.

Гідрофізичні процеси у океані розвиваються з часом. Тому всі гідрофізичні системи є динамічними системами тобто мають характерну для них поведінку у часі. Це означає, що деякі з характеристик системи мають підкорятися законам динаміки океану і що на зміну їх у часі накладені обмеження.

Дуже важливою характеристикою динамічної системи є стан системи. Стан – це деяка внутрішня характеристика системи. Вона охоплює ту частину минулого і теперішнього системи, яка визначає поведінку системи у майбутньому. Введення поняття про стан системи дозволяє формалізувати її опис і ввести математичну модель динамічної системи. Тоді поведінку системи можна представити деякою траєкторією у просторі станів тобто у просторі, кожна точка якого позначає можливий стан системи. Математична модель системи буде містити рівняння динаміки, що описує цю траєкторію.

Системний підхід є загальнометодологічним принципом процесу пізнання. Методологія наукового пізнання – це вчення про структуру, логічну організацію, методи і засоби дослідницької діяльності. Системний підхід у океанології представляє собою методологію вивчення океану, засновану на концепціях мети досліджень, динамічної системи та її стану. Системний аналіз у гідрофізиці океану – це практична реалізація системного підходу при розв’язку конкретних задач. В його основі лежить загальна методологія системного підходу, проте відмінну рису системного аналізу складає його направленість на розв’язок конкретних проблем організації досліджень.

Системний аналіз – це цілеспрямоване вивчення природних явищ засобами теорії та експерименту на основі раціонального за точністю та за витратами ресурсів відображення їх реальної динаміки. По своїй суті системний аналіз полягає у знаходженні оптимальної стратегії досягнення поставлених цілей шляхом синтезу, сумісного використання різноманітної інформації. Особливість системного аналізу складає інформаційна єдність теоретичної моделі явищ та безпосередніх вимірів його характеристик.

Системний підхід та системний аналіз як сучасні методи досліджень були викликані до життя необхідністю приймати рішення у складних ситуаціях, коли заделегіть неочевидна правильність вибору певного рішення. В кінці 50-х років склалась нова наукова дисципліна – теорія прийняття рішень, в задачі якої входила розробка загальних рекомендацій, що стосуються вибору раціонального способу дій у складних ситуаціях. У подальшому теорія прийняття рішень розрослася у широку дисципліну, що включає в себе теорію ігор, теорію масового обслуговування, і отримала нову більш загальну назву – теорія дослідження операцій. Дослідження операцій означає знаходження раціональних способів досягнення поставленої мети.

Операції, що визначаються як усякий рух до мети, повинні починатися з аналізу апріорної інформації, що мається у розпорядженні дослідника. Джерелом цієї інформації є досвід, тобто накопичені знання відносно об’єкту, явища, що

вивчається. Априорна інформація, що міститься, наприклад, в загальних законах фізики, дозволяє побудувати приблизну фізичну модель явища, що досліджується. Ця модель може бути потім використана для оцінки рівня невизначеності априорних знань відносно поставленої мети досліджень. Маючи інформацію щодо рівня невизначеності, можна розробити раціональний спосіб отримання нових, додаткових відомостей про явище, що вивчається, для досягнення мети найбільш ефективним шляхом.

Вибір способу досягнення мети повинен здійснюватися з урахуванням існуючих обмежень (матеріальних, технічних, фінансових та ін.). Тому системний аналіз можна інтерпритувати як оптимальне використання різноманітних ресурсів, що мають у розпорядженні дослідника.

Таким чином, системний аналіз по суті є оптимальним управлінням процесом отримання інформації про об'єкт, що досліджується в умовах, коли одночасно формується мета вивчення. Підбиваючи підсумки, сформулюємо основні етапи системного аналізу:

- початкове формулювання мети дослідження, що наближено враховує можливості (ресурси) досягнення мети, що мають наявності ;
- розробка критеріїв якості, що характеризують ступінь досягнення мети та оптимальність використання ресурсів ;
- побудова фізико-математичної моделі об'єкту (явища), що досліджується, яка відображає відомі його властивості, тобто синтезує априорну інформацію щодо об'єкту(явища) ;
- визначення операцій як засобів досягнення поставленої мети ;
- формулювання оптимізаційної задачі, що дозволяє знайти раціональну стратегію руху до мети серед усіх можливих операцій ;
- розв'язок оптимізаційної задачі, що дає можливість уточнити мету досліджень і знайти оптимальну стратегію досягнення мети.

Практична реалізація усіх перерахованих етапів системного аналізу повинна спиратися на сучасні засоби отримання, збереження та обробки

інформації, що об'єднуються в загальну інформаційну систему, яка містить ЕОМ у якості основного елемента. Наявність ЕОМ у системі дозволяє здійснити імітацію властивостей об'єкта (явища), що вивчається, що в свою чергу суттєво розширює можливості системного аналізу. Крім того, складні інформаційні системи можуть бути побудованими за ієрархічним принципом, коли окремі компоненти системи здатні розв'язувати оптимізаційні задачі поетапно. У цьому випадку оптимальна стратегія досягнення мети складається з послідовності оптимальних операцій, що відносяться до кожного з етапів.

Гідрофізичні системи відрізняються тим, що для них існує добре розроблений апарат гідротермодинамічних моделей, що дозволяють розвивати кількісні методи опису систем і на їх основі розробляти методологію системного вивчення гідрофізичних процесів. Тому, говорячи про системні методи у гідрофізиці океану, ми майже всюди будемо мати на увазі методи системного аналізу.

Етапи розвитку системних уявлень у гідрофізиці океану

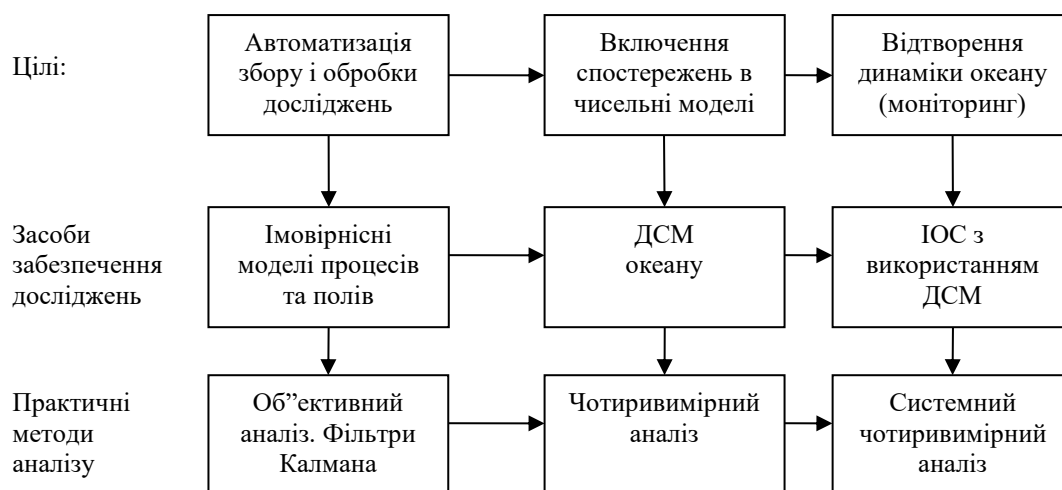


Рисунок 1.1

На першому етапі формування системного підходу в океанології розвивались ідеї створення автоматизованих систем збору, передачі та первинної обробки інформації, які б були універсальними та могли б використовуватись

для різних наукових цілей. Роботи у галузі автоматизації гідрофізичних досліджень переслідували дві загальні цілі:

- збільшити об'єм гідрофізичної інформації, яка отримується у рейсах;
- науково-дослідницьких судів чи при використанні автономних станцій;
- створити ефективні методи первинної обробки спостережень на ЕОМ.

Для досягнення першої з цих цілей зусилля вчених були спрямовані на розробку нової автоматизованої апаратури, яка б допускала безпосереднє введення вимірів у ЕОМ на судовому чи береговому обчислювальному центрі. Були створені автоматичні зондуючі та буксуємі комплекси апаратури, досліджені питання інформаційної стиковки пристроїв з ЕОМ (радіальний чи кільцевий зв'язок).

Досягненню другої мети на I етапі робіт сприяло широке впровадження у океанологію методів кореляційного та спектрального аналізів досліджень. Використання статистичних методів обробки спостережень призвело до ідеї побудови карт просторових полів океану на ЕОМ по розрізненим спостереженням, подібно до того як у метеорології здійснюється об'єктивний аналіз метеоданих.

Навідміну від I етапу - „етапу автоматизації”, II етап характеризувався розробкою та створенням нового класу моделей океану, які були названі динаміко-стохастичними. Ці моделі на практиці розв'язували згадану вище задачу з'єднання теоретичної моделі океану зі спостереженнями.

На зміну об'єктивному аналізу спостережень на цьому етапі прийшов чотирьохвимірний аналіз фізичних полів океану, тобто оптимальна обробка даних у чотирьохвимірному просторі – часі.

Створення ДСМ і розробка практичних прийомів чотирьохвимірного аналізу спостережень дозволили перейти до нового, III етапу формування системного аналізу. Проблема довгострокового прогнозу погоди і різноманітні народногосподарські задачі вимагають стеження за динамікою процесів у реальному океані. Щоб наблизитись до розв'язку цих задач, необхідно було

навчитись відновлювати динаміку реального океану на ЕОМ, використовуючи всі доступні джерела інформації щодо океану.

Чисельна ДСМ, вимірювальна система (контактна чи дистанційна) , архів гідрометеорологічної інформації повинні бути об'єднаними в загальну інформаційно-обчислювальну систему контролю. Ця система повинна найкращим чином використовувати матеріальні, інформаційні, обчислювальні та інші ресурси, що мають у наявності для досягнення мети. Тому III етап формування системного підходу передбачає подальший розвиток ідеї раціональної організації океанологічних досліджень. На цьому етапі ставиться задача конкретизувати цілі досліджень в процесі самих досліджень виходячи з критеріїв раціонального використання ресурсів, що мають у наявності.

Чотирьохвимірний аналіз досліджень з використанням ДСМ, який допускає уточнення цілей самого аналізу, ми назвали на блок-схемі системним чотирьохвимірним аналізом. Практичним результатом переходу від звичайного чотирьохвимірного аналізу до системного стали комп'ютерні атласи океану, що відкривають можливість проведення досліджень у режимі діалогу дослідник-атлас.

1.2 Основні концепції системного аналізу

Ми визначили системний аналіз як раціонально-організований рух до мети в умовах, коли формулювання мети допускає уточнення, тобто може містити невизначеність. В цьому полягає особливість системного аналізу, що відрізняє його від теорії систем та від дослідження операцій. Існує ряд загальних положень, характерних для цього методу, які можна було б назвати принципами чи основними концепціями системного аналізу.

Концепція мети. Згідно цієї концепції формулювання мети досліджень (чи прикладних задач контролю) містить невизначеності у своїй початковій

постановці. Вони викликані недостатньою апіорною інформацією про явище, що досліджується, а також про можливості досягнення мети при обмежених ресурсах (інформаційних, технічних, фінансових та інших). Як вже відмічалось, не визначеність цілі пояснюється також необхідністю шукати найкращі значення одразу кількох критеріїв якості досліджень.

Концепція інформаційної єдності теоретичних моделей і гідрофізичних вимірювань. Перш за все, створення інформаційних систем для вивчення океану і контролю за його динамікою передбачає об'єднання теоретичних моделей та спостережень, оскільки і ті і інші містять інформацію відносно поставлених задач. Для збереження цілісності системи інформація відносно цілей потребує сумісного використання законів динаміки океану та даних спостережень.

Для зближення теорії і експерименту необхідно добиватися такого положення, коли теоретичні моделі і спостереження об'єднуються в єдину інформаційну технологію вивчення океану чи контролю за його динамікою. Вимірювання полів океану повинні не тільки поступати у модель в процесі розв'язку рівнянь, але й впливати на структуру самої моделі.

Концепція комплексного використання всієї доступної інформації. Інформація щодо мети досліджень (контролю) є системоутворючим фактором побудови океанологічних інформаційно-обчислюваних систем (ІОС). Основними джерелами інформації є теоретичні моделі океану, в яких інформація зберігається у закодованому вигляді, а також прямі інструментальні вимірювання гідрофізичних полів. Декодування інформації, що міститься у моделі, означає виділення найбільш вірогідних рухів в океані з широкого класу можливих (віртуальних) рухів, що описуються моделлю.

Концепція оптимізації інформаційно-обчислювальних систем. Рациональна організація досліджень (контролю) неможлива без оптимального по деяким критеріям вибору структури ІОС, її параметрів, визначення плану натурного експерименту і вирішення інших науково-технічних питань. Вибір

найкращого варіанту системи з множини можливих являє собою проблему оптимізації ІОС.

Процес оптимізації ІОС, як і процес її побудови, підкоряється формулюванню цілі системного аналізу. Але на етапі оптимізації системи може бути отримана важлива інформація про досяжність самої мети в її початковому формулюванні. Так, якщо варіація параметрів системи для вибору найкращого набору їх значень не призводить до задовільних результатів (вимоги до системи перевищують її технічні можливості), необхідно внести уточнення в формулювання мети системного аналізу.

Перераховані вище основні концепції системного аналізу дозволяють представити процес вивчення океану у вигляді інформаційної блок-схеми.

Дослідник веде діалог з інформаційною системою, яка збирає для нього відомості про явища в океані, які його цікавлять. Питання дослідника визначають формулювання цілей вивчення океану. Поточний обсяг інформації відносно цілей визначається шляхом комплексного використання динамічної моделі явища та спостережень. Досягнутий рівень знань порівнюється з необхідним рівнем знань, тобто з цілями досліджень (на блок-схемі це позначено колом).

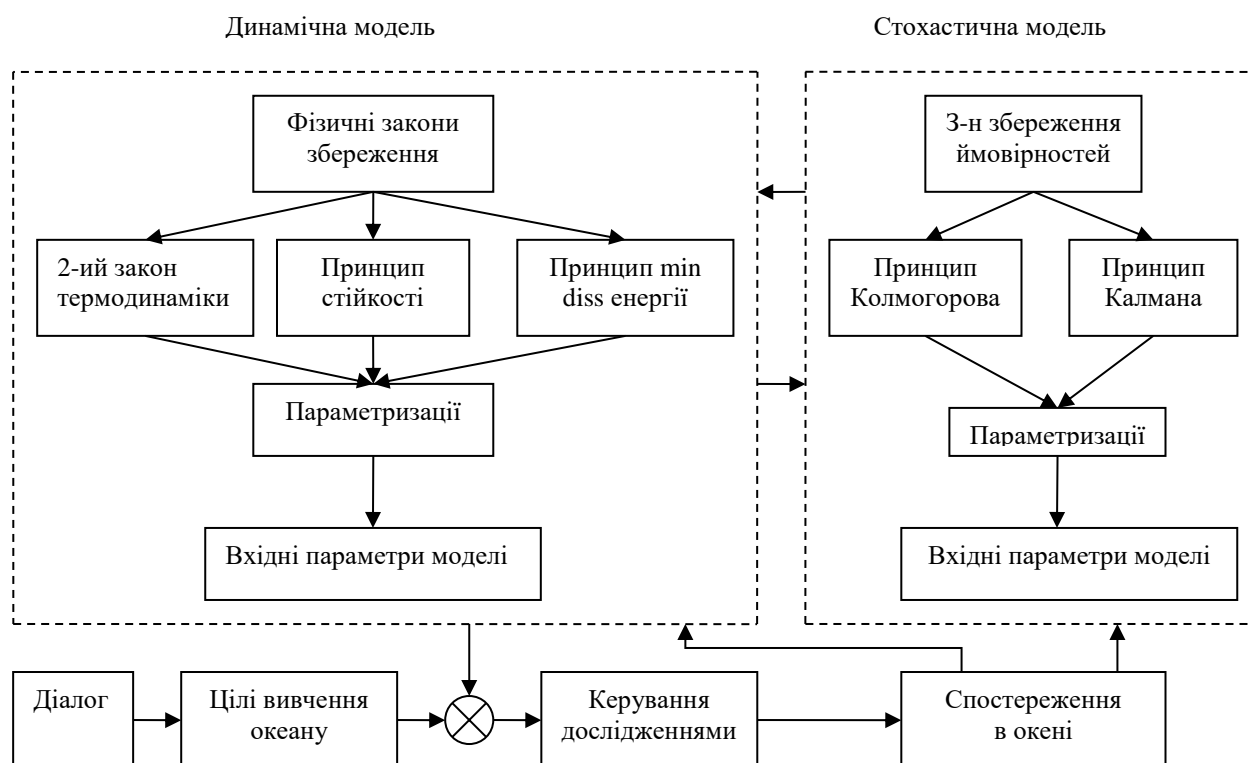


Рисунок 1.2 – Загальна схема організації досліджень

Блок керування дослідженнями здійснює обернений зв'язок в системі: за результатами співставлення очікуваних результатів з досягнутими вносяться зміни в процес досліджень. В першу чергу ці зміни розповсюджуються на засоби вимірювань як на джерело найбільш оперативної інформації про океан. Регулюється обсяг і характер вимірювань, уточнюються плани їх розташування в океані і т.д..

Концепція інформаційної ждності моделі і спостережень представлена на схемі взаємними зв'язками між динамічною і стохастичною моделями. динамічна модель враховує фізичні зв'язки, що накладаються на мінливість характеристик будь-якого гідрофізичного процесу в океані. Стохастична модель враховує невизначеності моделювання процесів у реальному океані, тобто заснована на законах, що контролюють випадкові відхилення модельних оцінок відносно істинних значень параметрів, явищ.

Як динамічна так і стохастична модель будуються за принципом послідовного усунення невизначеностей. Будь-яка гідродинамічна модель основана на законах збереження енергії, імпульса, маси. Конкретна форма прояву цих законів визначається метою досліджень. Залучаючи відомі принципи гідромеханіки (принцип стійкості, принцип мінімуму дисипації енергії та ін.), можна уточнити рівняння динамічної моделі, що ще більше обмежить множину можливих рухів, що дає модель.

Для замикання рівнянь динамічної моделі вводяться параметризації. Параметризацією, що найбільш широко використовується є замикання Буссінеска, що виражає другі моменти випадкових похибок моделювання через перші.

Стохастична модель спирається на закон збереження імовірностей – основний закон ймовірнісного моделювання. Конкретні форми його прояву реалізуються для просторових випадкових полів з використанням принципа

Колмогорова. Для просторово часових полів полів використовується принцип Калмана. Принцип інформаційної єдності виражається в об'єднанні динамічної і стохастичної моделей в загальну динаміко-стохастичну модель океану. Об'єднання відбувається шляхом використання умовних по відношенню до спостережень законів розподілу ймовірностей при побудові рівнянь динамічної моделі. Через умовні закони розподілу вимірювання впливають на рівняння моделі. З іншого боку інформація щодо можливих рухів у океані, яку містить динамічна частина моделі, служить для вибору тих точок, де вимірювання полів будуть найбільш інформативними.

Помітимо, що динаміко-стохастичні моделі відрізняються від звичайних теоретичних моделей океані за цілим рядом ознак.

Таблиця 1.1 – Особливості динаміко-стохастичного моделювання океану

Процес моделювання	Теоретичні моделі	Динаміко-стохастичні моделі
Призначення моделей	Вивчення можливих рухів в океані шляхом варіації рівнянь і вхідних параметрів моделей	Вивчення реальних рухів у океані шляхом сумісного використання рівнянь динаміки океану і спостережень
Основи побудови моделей	Закони збереження імпульсу, маси, енергії; принципи гідромеханіки, параметризації	Закони збереження імпульсу, маси, енергії, імовірності ; принципи гідромеханіки, принципи Колмогорова і Калмана , параметризації
Характер осереднення і замикання рівнянь	Безумовне осереднення рівнянь, замикання на рівні перших моментів (виключаючи турбулентні моделі)	Умовне по відношенню до спостережень осереднення рівнянь, замикання на рівні других моментів

Практичне застосування	Розрахуно і прогноз можливих рухів в океані	Розрахуно і прогноз рухів в реальному океані. Контроль за станом океану
Напрямки вдосконалення	Вдосконалення параметризацій, використання чисельних методів і потужних ЕОМ	Підлаштування під спостереження параметрів моделі, використання чисельних методів, імітаційне моделювання

В той час як звичайні теоретичні моделі описують можливі рухи в „модельному” океані, динаміко-стохастичні моделі представляють можливі рухи в реальному океані. Це відбувається за рахунок активного використання прямих вимірювань характеристик океану в процесі моделювання.

Таким чином, запровадження основних концепцій системного аналізу в практику океанологічних досліджень відкриває перспективи створення нових інформаційних технологій вивчення океану. Системний аналіз також відповідає і основній практичній проблемі океанології – створенню наукових основ контролю за динамікою (моніторинга) океану.

1.3 Основні рівняння теорії звукових хвиль та деякі допоміжні співвідношення

В ідеальному рідкому середовищі існує тільки повздовжня звукова хвиля. Звукова хвиля (чи звукове поле) в ідеальній рідині характеризується п'ятьма величинами: тиском p , щільністю і трьома складовими швидкості $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$, які пов'язані між собою рівняннями:

– рівнянням стану:

$$p=f(\rho) \quad (2.1)$$

– рівнянням Ейлера:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p = -\vec{f} \quad (2.2)$$

– та рівнянням неперервності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = -F \quad (2.3)$$

Функції $F = F(\vec{x}, t)$ та $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t)$ -що визначають умови збурення – це щільності скалярного джерела часток і (векторних) зовнішніх сил, ∇ - оператор Гамільтона, div – оператор дивергенції. В загальному вигляді система (2.1) – (2.3) нелінійна, проте для малих зсувів та малих змін щільності, які характеризують звукову хвилю рівняння (2.1) – (2.3) можна спростити.

Тиск p складається з гідростатичного тиску p_0 та звукового p_1 тобто. $p = p_0 + p_1$. Аналогічно для щільності $\rho = \rho_0 + \rho_1$, де ρ_0 - щільність незбуреного середовища, ρ_1 - щільність, обумовлена звуковою хвилею. Тоді $dp = dp_1$ і $d\rho = d\rho_1$.

З рівняння (2.1) з огляду малої зміни тиску і щільності після розкладу в ряд Тейлора отримаємо:

$$dp = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + o((d\rho)^2) = c^2 d\rho + o(d\rho^2) \quad (2.4)$$

$$\text{де } c^2 = \left. \frac{\partial f}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}.$$

З (2.4), інтегруючи в припущенні, що $c = \text{const}$, отримаємо лінеаризоване рівняння $p = c^2 \rho + \text{const}$, звідки диференціюванням по t отримаємо:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

У другому рівнянні (2.2) в силу малості коливальної швидкості у звуковій хвилі членом $(\vec{V} \nabla) \vec{V}$ можна знехтувати порівняно з локальним прискоренням. Тоді з урахуванням того, що $\rho_0 \gg \rho_1$ отримаємо лінеаризоване рівняння Ейлера:

$$\text{grad}(p) + \rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{f} \quad (2.6)$$

Для спрощення рівняння (2.3) введемо в це рівняння величину ущільнення s , котру визначаємо виразом:

$$s = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad \text{чи} \quad \rho = \rho_0(1 + s).$$

Підставляючи $\rho = \rho_0(1 + s)$ в рівняння (2.3) і нехтуючи величинами другого порядку малості отримаємо: $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(1 + s) + \rho_0 \text{div}[(1 + s)\vec{V}] = -F$

звідки:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{V} = -F \quad (2.7)$$

Виключаючи за допомогою (2.5) з (2.7) $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ отримаємо:

$$\frac{1}{\rho_0 c} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \text{div} \vec{V} = -F \quad (2.8)$$

Таким чином рівняння (2.5), (2.6) та (2.8) є лінеаризованими варіантами рівнянь стану, Ейлера та неперервності відповідно. З цих рівнянь можна одержати хвильові рівняння для p, \vec{V} та ρ .

Дійсно, застосовуючи до рівняння (2.6) операцію div та диференціюючи рівняння неперервності по часу, після віднімання отримаємо хвильове рівняння для тиску:

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\text{div}(\vec{f}) \quad (2.9)$$

Застосувавши операцію grad до рівняння неперервності та продифференціювавши рівняння Ейлера по часу отримаємо рівняння для швидкості:

$$\text{grad}(\text{div} \vec{V}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \quad (2.10)$$

В силу теореми Гельмгольца $\vec{V} = -\text{grad}\Phi + \text{rot}\vec{\Psi}$ і того, що звукове поле безвихрове (тобто $\text{rot}\vec{\Psi} \equiv 0$) і з урахуванням тотожності $\text{rot}(\text{grad}(u)) \equiv 0$ хвильове рівняння для коливальної швидкості частинок \vec{V} набуває вигляду:

$$\Delta \vec{V} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \quad (2.11)$$

Введена вище скалярна функція $\Phi(\vec{x}, t)$ називається потенціалом швидкості.

З рівняння (2.6), за відсутності зовнішніх сил $\vec{f} \equiv 0$, при $\vec{V} = -\text{grad}\Phi$ отримаємо:

$$\text{grad}(p_1) + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \text{grad}(p) - \rho \cdot \text{grad}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0$$

чи

$$p_1 = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{const} \quad (2.12)$$

Для гармонічної звукової хвилі:

$$p_1 = -i \cdot w \cdot \rho_0 \cdot \Phi \quad (2.13)$$

Підставляючи (2.12) в (2.9) та інтегруючи його по часу отримаємо хвильове рівняння для потенціалу швидкості:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = - \int_0^t \text{div} f(\vec{x}, \tau) d\tau \quad (2.14)$$

Легко бачити, що всі функції p, ρ, V_x, V_y, V_z пов'язані простими співвідношеннями з потенціалом швидкості:

$$p(\vec{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{const}, \quad \rho(\vec{x}, t) = \rho_0^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad V_x(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \Phi(\vec{x}, t), \quad V_y(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial y} \Phi(\vec{x}, t),$$

$$V_z(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial z} \Phi(\vec{x}, t) \quad (2.15)$$

Таким чином всі функції, що характеризують малі зміни p, ρ та V отримуються з однієї скалярної функції $\Phi(\vec{x}, t)$ шляхом диференціювання.

Надалі будемо використовувати рівняння (2.9) для тиску, а джерела звуку будемо позначати $U(\vec{x}, t)$. Гармонічні джерела будемо позначати через $u(\vec{x})$, тоді

$$\Delta p + k^2(x)p = -u(x) \quad (2.16)$$

Як було зазначено $k = \frac{\omega}{u(x)}$ характеризує властивості середовища і в загальному випадку є комплексною величиною, причому $\text{Im } k > 0$.

Для повного опису поширення звукових хвиль у хвилеводах необхідно до (2.16) додати граничні умови. Будемо розглядати хвилеводи у вигляді шару води, що лежить на рідкому однорідному півпросторі. У воді $c = c(x)$, $\rho = \rho_0$ в півпросторі $\rho = \rho_1$, $c = c_1 = \text{const}$ причому $c_1 > c$, $\rho_1 > \rho_0$. На верхній границі $z = 0$ будемо припускати виконаною умову

$$p|_{z=0} = 0 \quad (2.17)$$

а на границі – умову сполучення

$$\rho_0 p|_{z=H-0} = \rho_1 p|_{z=H+0} \quad (2.18)$$

Для виділення єдиного розв'язку потрібні умови:

$$\lim_{x,y \rightarrow \infty} p(x, y, z) = 0, \text{Im } k > 0, \text{Im } k_1 > 0 \quad (2.19)$$

Для водного шару на нижній границі $z = H$ задають граничні умови $\frac{\partial p}{\partial z}|_{z=H} = 0$ (акустично жорстке дно) або більш загальну умову третього роду $p + \alpha \frac{\partial p}{\partial z}|_{z=H} = 0$, де α - вхідний імпеданс шару.

Наведемо ряд результатів щодо представлення полів розподілених гармонічних джерел в горизонтально стратифікованому хвилеводі.

У задачах управління хвилями гідроакустичними полями в якості управляючих впливів виступають або розподілені об'ємні джерела, або

розподілені поверхневі джерела, або джерела зосереджені в заданому числі точок. Розглянемо ці випадки окремо.

1.3.1 Об'ємні розподілені джерела

У роботі[12], використовуючи визначення точкового гармонічного джерела, введено поняття об'ємного розподіленого джерела, заданого деякою щільністю розподілу об'ємної коливальної швидкості $u(r_0)$ точкових гармонічних джерел у обмеженому об'ємі τ_0 . За такого визначення для шару води, що лежить на рідкому однорідному півпросторі, гранична задача для акустичного поля буде:

$$\Delta p(\mathbf{r}) + k^2(z)p(\mathbf{r}) = -4\pi \cdot u(\mathbf{r})$$

$$p(\mathbf{r})|_{z=0} = 0, \quad \rho_0 p(\mathbf{r})|_{z=H-0} = \rho_1 p(\mathbf{r})|_{z=H+0}, \quad p_z(\mathbf{r})|_{z=H-0} = p_z(\mathbf{r})|_{z=H+0} \quad (2.20)$$

де $k(z) = \frac{\omega_0}{c(z)}$, $\text{Im } k > 0$, $c(z)$ – залежність швидкості звуку від глибини у хвилеводі, ρ_0, ρ_1 – щільність води і рідкого ґрунту, H – товщина водного шару, $\mathbf{r} = (r, z, \varphi)$ – радіус-вектор в циліндричній системі координат. На нескінченності приймемо $p(\mathbf{r}) \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} 0$.

Розв'язок цієї задачі дається виразом:

$$P(\mathbf{r}) = \iiint_{\tau_0} u(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\tau_0 \quad (2.21)$$

де $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ – розв'язок крайової задачі

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + k^2(z)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{z=0} = 0, \quad \rho_0 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{z=H-0} = \rho_1 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|_{z=H+0}, \quad \frac{\partial G}{\partial z}|_{z=H+0} = \frac{\partial G}{\partial z}|_{z=H-0} \quad (2.22)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) \rightarrow 0, |\vec{r} - \vec{r}_0| \rightarrow \infty$$

\vec{r}_0 - радіус-вектор точки об'єму τ_0 . Для функції Гріна розглянутого хвилевода відомі представлення:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{i}{4} \sum_{j=1}^N \varphi_j(z) \varphi_j(z_0) H_0^{(1)}(h_j R) - \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{k_2} \psi_\nu(z) \psi_\nu(z_0) H_0^{(1)}(\sqrt{\nu} R) d\nu \quad (2.23)$$

$$\text{Im} \sqrt{\nu} > 0, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2^2}$$

($R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ - проекція вектора $(\vec{r} - \vec{r}_0)$ на горизонтальну площину).

Тут $\varphi_h(z), h_h, \psi_\nu(z), \nu$ - дійсні власні функції і власні значення відповідно дискретного та неперервного спектрів задачі Штурма-Ліувілля:

$$\varphi_{nzz}(z) + k^2 \cdot n(z) \cdot \varphi_n(z) = h_n^2 \varphi_n(z), n = 1, 2, \dots, N \quad (2.24)$$

$$k_2 < h_n < k_{\max}$$

$$\varphi_{\nu zz}(z) + k^2 \cdot n(z) \cdot \varphi_\nu(z) = \nu \varphi_\nu(z), -\infty < \nu \leq k_2 \quad (2.25)$$

де N – кількість власних значень дискретного спектра.

Власні функції (2.25), що задовольняють умовам $\varphi(0) = 0$, $\varphi(H-0) = \varphi(H+0)$

, $\varphi_z|_{z=H-0} = m^{-1} \varphi_z|_{z=H+0}$, $m = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ ортогональні в наступному сенсі:

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm}, \quad \langle \varphi_n, \varphi_\nu \rangle = 0, \quad \langle \varphi_\mu, \varphi_\nu \rangle = \delta_{(\mu-\nu)}$$

де

$$\langle f(z), g(z) \rangle = \int_0^H f g \cdot dz + m^{-1} \int_H^\infty f g \cdot dz \quad (2.26)$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)} = r \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 2\frac{r_0}{r} \cos(\varphi_0 - \varphi)} \approx r - r_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) =$$

$$= r - (r_0 \cos \varphi_0) \cos \varphi - (r_0 \sin \varphi_0) \sin \varphi = r - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi$$

Використовуючи наближення

$$R = r \sqrt{1 + t^2 - 2t\mu} = r[1 - t\mu + \frac{1}{2}t^2(1 - \mu^2) + \dots], \mu = \cos(\varphi - \varphi_0), t = \frac{r_0}{r} < 1$$

і залишаючи в експоненті у (2.27) члени першого та нульового порядків, а в знаменнику - нульового (тобто при $\frac{1}{2}t^2 h_n r \ll \pi$), отримаємо:

$$p(\vec{r}) \approx -\frac{i}{4} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^N \varphi_n(z) \frac{e^{ih_n R}}{\sqrt{h_n R}} F_n(\varphi, \rho) \quad (2.28)$$

$$F_n(\varphi, \rho) = \iiint_{\tau_0} \varphi_n(z_0) u(\vec{r}_0) e^{ih_n r_0 \mu} d\tau_0 \quad (2.29)$$

Функція $F_n^0(\varphi, \rho)$ описує коефіцієнт збудження нормальної хвилі номера n та залежність її амплітуди від кута φ . Наприклад при $u(\vec{r}_0) = u_1(\vec{r}_0, \varphi_0) u_2(\vec{r}_0)$ (2.29)

має більш простий вид $F_n^0(\varphi, \rho) = F_n(\varphi, \rho) \cdot F_{2n}$, де $F_{2n} = \int_{l_n}^0 \varphi_n(z_0) u_2(z_0) dz_0$;

$$F_{2n}(\varphi, \rho) = \int_0^L \int_0^{2\pi} u_1(r_0, \varphi_0) e^{-ih_n r_0 \mu} r_0 \cdot dr_0 \cdot d\varphi_0$$

Тут L, l_n - максимальні розміри області $\tau_0 r_0 n_0 u z_0$, де $\rho(z_0) \neq 0$.

Підкреслимо, що представлення (2.28) та (2.29) справедливо при $r > r_0, r \gg 2h^2 / \lambda_n$

1.3.2 Поверхневі розподілені гармонічні джерела

Нехай задано поверхню S_0 , яка належить простору двічі неперервно диференційовних функцій.

Нехай S_0 акустично прозора і на ній відомо розподіл потенціалу тиску $u_1(\mathbf{r})$ чи коливальні швидкості $V_2(\mathbf{r})$. Для такого джерела гранична задача для поля $p(\mathbf{r})$ буде:

$$\begin{aligned} \Delta p(\mathbf{r}) + k^2(z)p(\mathbf{r}) &= 0, \\ p(\mathbf{r})|_{z=0} &= 0, \quad p(\mathbf{r})|_{z=H-0} = mp(\mathbf{r})|_{z=H}, \quad p(\mathbf{r})|_{z=H-0} = p(\mathbf{r})|_{z=H+0} \\ p(\mathbf{r})|_{z \in S_0} &= u_1(\mathbf{r}_0) \quad \text{чи} \quad p(\mathbf{r})|_{z \in S_0} = V_2(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (2.30)$$

(\mathbf{h}_0^r - вектор норм до поверхні S_0) . На нескінченності припускається, що виконуються умови порціального випромінювання [12]

Як показано в [1,12,16] розв'язок задачі (2.30) можна представити за допомогою функції Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ крайової задачі (2.22) у вигляді:

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left\{ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) p_{\mathbf{h}_0}(\mathbf{r}_0) - p(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{h}_0} \right\} ds \quad (2.31)$$

(\mathbf{r}_0 - радіус-вектор точки поверхні S_0).

Формула (2.31) строго доведена для $k(z) = \text{const}$. Але в подальшому будемо використовувати її для довільного хвилевода. Джерело з заданими $u_1(\mathbf{r}_0)$ або $u_2(\mathbf{r}_0)$ на поверхні S_0 дотримуючись [6] назовемо поверхневим.

(2.31) фатично є інтегральним представленням розв'язку крайової задачі (2.30). Перший і другий інтеграли в (2.31) назовемо наслідуючи [16] антенними потенціалами подвійного та простого шарів.

Якщо S_0 є прямокутником розміру $L \times l$ розташованим на площині YOZ тобто $S_0 = \{y, z : -l/2 \leq z \leq l/2, -L/2 \leq y \leq L/2\}$ і на ній задано $u_2(\mathbf{r}_0)$, то формула (2.31) перетворюється на аналог формули Кіргофа для безмежного простору і представляється у вигляді

$$p(\mathbf{R}) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} u_2(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_0) dr d\xi, \quad (2.32)$$

де $u_2(\mathbf{r}_0) = u_2(r, \xi)$, $\mathbf{r}_0 = (r, \xi)$ - радіус-вектор точки поверхні S_0 , $\mathbf{R} = (x, y, z) = (\mathbf{r}, z)$ - радіус-вектор точки спостереження в декартовій системі координат (x - поздовжня координата, y - попереречна координата, z - глибина), $\mathbf{r} = (x, y)$ - горизонтальна складова. Функція $G(\mathbf{R}, \mathbf{r}_0)$ має представлення (2.23) де $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ - горизонтальна проекція радіус-вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Формула (2.32) у подальшому буде використовуватись для розв'язку задач керування акустичними полями у хвилеводах. Зазначимо, що (2.32) можна отримати при $r_0 = r$, $z_0 = \xi$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ тобто $\rho(r_0, z_0, \varphi_0) = \rho(r, \xi, \frac{\pi}{2}) \delta(\varphi_0 - \frac{\pi}{2})$, $\rho(\mathbf{r}_0) = \delta(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}) \psi(r, \xi)$, де $\psi(r, \xi) = \rho(\mathbf{r}_0)$.

Конкретизуємо (2.32) на основі ВКБ наближення для шару з плавним показником заломлення і верхньої $z=0$ акустично м'якою, а нижньою $Z=H$ акустична жорсткою границями.

Для цього $\exp\{ika_m |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| / \sqrt{ka_m |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}\}$ представимо у вигляді $\exp\{ika_m r - ika_m r \sin \varphi\} / \sqrt{ka_m r}$. Нехтуючи в експоненті доданком $o((\rho/r_0)^2)$ і залишаючи в знаменнику лише перший член розкладу з (2.32) при $\frac{1}{2} ka_m r \frac{r_0}{\rho} \ll \pi$ отримаємо

$$P(\vec{R}) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{i}{8\pi}} \frac{e^{ika_m r}}{\sqrt{ka_m r}} \right) \varphi_m(z) F_m(\varphi)$$

де

$$F_m(\varphi) = \int_{-L/2-l/2}^{L/2-l/2} \int \varphi_m(\xi) e^{-ika_m \eta \sin \varphi} u_2(\xi, \eta) d\xi \cdot d\eta$$

- амплітуда збудження m -ої моди.

Визначення акустичних полів від поверхневих джерел для довільних поверхонь вимагає спеціального розгляду, оскільки при цьому необхідно розв'язувати інтегральні рівняння першого чи другого роду з визначення невістачаючих тиску на S_0 чи коливальної швидкості на S_0 для другої і першої крайових задач відвідно, використовуючи властивості антенних потенціалів як в [16]

1.3.3 Лінійні розподілені гармонічні джерела

Вертикально розподілене джерело з розподілом $u_2(z)$ по вертикалі, розташований в точці (r_0, φ_0) ; $z \in z_2 - z_1$; $z_2, z_1 \in [0, H]$. Поле такого джерела обчислюється за формулою:

$$P(\vec{R}) = \int_{z_2}^{z_1} u_2(z_0) G(\vec{R}, \vec{R}_0) dz_0, \quad \vec{R}_0 = (r_0, z_0, \varphi_0), \quad \vec{R} = (r, z, \varphi) \quad (2.34)$$

Якщо врахувати, що $R = |\vec{R} - \vec{R}_0|$ - проекція вектора $(\vec{R} - \vec{R}_0)$ на горизонтальну площину, то

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos(\varphi - \varphi_0)} \approx r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (2.35)$$

де

$$H_0^{(1)}(h_u R) \approx \frac{e^{i(h_n R - \pi/4)}}{\sqrt{h_n R}} = \frac{e^{-i\pi/4} e^{ih_n r} e^{-ih_n r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}}{\sqrt{h_n r}} \quad (2.36)$$

тоді

$$P(\vec{r}) = \int_{z_2}^{z_1} u_2(z_0) \left(-\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^N \varphi_n(z) \varphi_n(z_0) H_0^{(1)}(h_n R) - \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{k_z^2} \varphi_v(z) \varphi_v(z_0) H_0^{(1)}(\sqrt{v} R) dv \right) dz_0$$

Для неоднорідного шару формула набуває найбільш простого вигляду

$$P(\vec{r}) = p(r, z, \varphi) = \int_{z_2}^{z_1} u_2(z_0) G(r, z, \varphi; r_0, z_0, \varphi_0) dz_0 \quad (2.37)$$

де

$$G(r, z, \varphi; r_0, z_0, \varphi_0) = -\frac{i}{4} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^N \varphi_n(z) \varphi_n(z_0) \frac{e^{ih_n(r-r_0 \cos(\varphi - \varphi_0))}}{\sqrt{h_n r}} \quad (2.38)$$

Розглянемо горизонтальну антену.

Антенa знаходиться на глибині z_0 , має довжину L і розташовується в площині ZOY. В цьому випадку

$$P(\vec{r}) = p(r, z, \varphi) = \int_{-L/2}^{L/2} u(x) G(z, z_0, |\vec{r} - \vec{r}_0|_x) dx.$$

Роблячи заміну $|\vec{r} - \vec{r}_0|_x \approx r - x \sin \varphi$ і враховуючи, що $\varphi_0 = \pi/2$ можемо записати

$$P(\vec{r}) = p(r, z, \varphi) = \int_{-L/2}^{L/2} u(x) \times$$

$$\times \left[-\frac{i}{4} \sum_{n=1}^N \varphi_n(z) \varphi_n(z_0) \frac{e^{-i\pi/4 + ih_n(r-x\sin\varphi)}}{\sqrt{h_n r}} - \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{k_2^2} \varphi_\nu(z) \varphi_\nu(z_0) \frac{e^{-i\sqrt{\nu}(\pi/4) - i\sqrt{\nu}x\sin\varphi + i\sqrt{\nu}r}}{\sqrt{h_n r}} d\nu \right] dx \quad (2.39)$$

де

x – віддаль від центру антени, φ – кут повороту атаки в горизонтальній площині по відношенню до напрямку на джерело, r – віддаль по горизонталі до центру антени.

Для шару з твердим дном у виразі для $p(k)$ залишається тільки перший інтеграл бо $\varphi_\nu(z) \equiv 0$. Також зауважимо, що енергію переносять лише N неоднорідних хвиль, що відповідають дискретному спектру і хвилі, що відповідають неперервному спектру для $0 < \nu < k_2^2$. Внесок в потік потужностей полів неперервного спектру при $-\infty < \nu < 0$ (реактивні поля) і дискретного при $n > N$ (неоднорідні хвилі) нульовий для відстаней $L^2 / \lambda \gg 1$.

1.3.4 Точкові джерела с комплексними амплітудами

Розглянемо решітку випромінювачів з координатами $\{x_m, y_m, z_m\}, m = 1..M$ в декартовій, або $\{r_m, z_m, \varphi_m\}$ в циліндричній системах координат відповідно. Тоді, враховуючи, що

$$|r - r_m| = R_m \approx r - r_m \cos(\varphi - \varphi_m) = r - r_m \cos\varphi_m \cos\varphi - r_m \sin\varphi_m \sin\varphi = r - x_m \cos\varphi - y_m \sin\varphi$$

. Поле в точці (r, z, φ) буде таким:

$$P(\vec{r}) = p(r, z, \varphi) = \sum_{m=1}^M \left[-\frac{i}{4} \sum_{n=0}^N u_m \varphi_n(z) \varphi_n(z_m) H_0^{(1)}(h_n(r - x_m \cos\varphi - y_m \sin\varphi)) - \right. \\ \left. - \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{k_2^2} u_m \varphi_\nu(z) \varphi_\nu(z_m) H_0^{(1)}(\sqrt{\nu}(r - x_m \cos\varphi - y_m \sin\varphi)) d\nu \right] \quad (2.40)$$

Для шару аналогічно (2.37) отримаємо

$$P(\vec{r}) = p(r, z, \varphi) = \sum_{n=0}^N (-i/4) \varphi_n(z) e^{ih_n r - ih_n \pi/4} \frac{1}{\sqrt{h_n r}} \left[\sum_{m=1}^M u_m \varphi_n(z_m) e^{-ih_m (x_m \cos \varphi + y_m \sin \varphi)} \right] \quad (2.41)$$

де в дужках знаходиться коефіцієнт збудження n -ої моди.

Для плоскої антенної решітки в площині YOZ, поклавши $x_m = 0$ в (2.40), отримаємо

$$P(\vec{r}) = p(r, z, \varphi) = \sum_{n=0}^N (-i/4) \varphi_n(z) \frac{e^{ih_n r}}{\sqrt{h_n r}} \left(\sum_{m=1}^M u_m \varphi_n(z_m) e^{-ih_n (y_m \sin \varphi)} \right) e^{-ih_n \pi/4} \quad (2.42)$$

Поле вертикальної лінійки випромінювачів, що знаходяться вздовж осі OZ для шару буде:

$$P(\vec{r}) = p(r, z, \varphi) = \sum_{n=0}^N (-i/4) \varphi_n(z) \frac{e^{ih_n r}}{\sqrt{h_n r}} \sum_{m=1}^M u_m \varphi_n(z_m) e^{-ih_n \pi/4} \quad (2.43)$$

Аналогічно для горизонтальної дискретної антени, що знаходиться на глибоині z_0 в площині YOZ можемо записати:

$$P(\vec{r}) = p(r, z, \varphi) = \sum_{n=0}^N ((-i/4) \varphi_n(z) \frac{e^{ih_n r}}{\sqrt{h_n r}} e^{-ih_n \pi/4}) \sum_{m=1}^M u_m \varphi_n(z_0) e^{-ih_n y_m \sin \varphi}$$

В подальшому отримані вирази використаємо для розв'язання задач керування акустичними полями.

1.3.5 Поле протяжного джерела в регулярному хвилеводі океану

Розглянемо випадок регулярного хвилевода, що представляє собою рідкий шаровий напівпростір із змінною густиною $\rho(z)$ та швидкістю звуку $c(z)$. При цьому $\rho(z)$ та $c(z)$ можуть мати розриви (наприклад, на глибині H). В цьому випадку математична постановка задачі про поле тиску p джерела (f, D) може бути записана у вигляді

$$Lp = (L_r + L_z)p = -f(x), \quad x \in \Omega_\infty, \quad (2.44)$$

$$p|_{z=0} = 0, \quad (2.45)$$

$$[p]_{z=H} = 0, \quad [\rho^{-1}(z) \partial p / \partial z]_{z=H} = 0, \quad (2.46)$$

$$p \in M(\Omega_\infty). \quad (2.47)$$

Тут $x = (x, y, z)$; $f(x)$ -объемна густина джерела,

$$L_r = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + r^{-2} \partial^2 / \partial \varphi^2 = \Delta_\perp,$$

$$L_z = \rho(z) \partial / \partial z (\rho^{-1}(z) \partial / \partial z) + k^2(z),$$

$$r = |r|, \quad r = (x, y) = (r, \varphi), \quad D = \text{supp } f,$$

дужки в (2.46) означають різницю границь величин, що в них знаходяться при $z \rightarrow H \pm 0$; $\Omega_\infty = \Omega \cup \Omega_1$ -шаровий напівпростір;

$$\Omega = \{x \in R^3 : x, y \in R^2, z \in [0, H]\},$$

$$\Omega_1 = \{x \in R^3 : x, y \in R^2, z \in (H, \infty)\},$$

умова (2.47) означає записані формально умови випромінювання при $|x| \rightarrow \infty$, які нижче конкретизуються.

За допомогою заміни

$$u = p\rho^{-1/2}(z) \quad (2.48)$$

рівняння (2.44) перетворюється до стандартного рівняння Гельмгольца

$$(\Delta + K^2(z))u = -f(x)/\rho^{1/2}(z) \quad (2.49)$$

Тут

$$K^2(z) = K^2(z) + \frac{1}{2\rho(z)} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z^2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} \right)^2.$$

Крайові умови (2.45), (2.47) зберігаються незмінними. Умови зшивки (2.46) перетворюються до вигляду

$$\left[u\rho^{1/2} \right]_{z=H} = 0, \quad \left[\rho^{-1} \partial \left(u\rho^{1/2} \right) / \partial z \right]_{z=H} = 0 \quad (2.50)$$

Для розв'язку задачі (2.49), (2.45), (2.50), (2.47) розглянемо допоміжну задачу Штурма-Ліувілля

$$(\partial^2 / \partial z^2 + K^2(z))\phi(z, \xi^2) = \xi^2 \phi(z, \xi^2). \quad (2.51)$$

Застосуємо далі припущення щодо існування границі $\lim_{z \rightarrow \infty} K^2(z) = K_\infty^2 < \infty$

Введемо позначення: $K^2(z) - K_\infty^2 = q(z)$; $K_\infty^2 - \xi^2 = \lambda$. Після цього задача (2.51) перетворюється до вигляду

$$(\partial^2 / \partial z^2 + q(z) + \lambda)\phi(z, \lambda) = 0 \quad (2.52)$$

Застосуємо наступне правдоподібне для акустики океану припущення про те, що $q(z) \in L^1(0, \infty)$, тобто $\int_0^\infty |q(z)| dz < \infty$. Тоді, окрім стандартної крайової умови (2.45) на поверхні і умови зшивки при $z = H$ для φ можна поставити класичну умову випромінювання при $z \rightarrow \infty$ [2]:

$$\partial \varphi(z, \lambda) / \partial z - i \sqrt{\lambda} \varphi(z, \lambda) = o(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.53)$$

Задача (2.52), (2.45), (2.50), (2.53) носить назву сингулярної задачі Штурма-Ліувілля [2]. Спектр такої сингулярної задачі складається з двох компонент: дискретної Λ_1 , що містить скінченну кількість N власних значень λ_n , і неперервної Λ_2 , що містить всі дійсні числа $\lambda > 0$ [2,3]. Вказана неперервна компонента існує завжди (при будь-якому $q \in L^1(0, \infty)$), в той час як дискретна компонента може бути відсутньою, наприклад у випадку $K^2(z) \equiv K_\infty^2 = \text{const}$, $q(z) \equiv 0$. Останнє означає, що дискретна компонента може існувати лише для змінного $K(z)$, який повністю визначає її властивості, тобто загальну кількість і характер розташування відповідних власних значень. Вказаним множинам Λ_j , $j = 1, 2$, відповідають дискретний та неперервний спектри

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\xi &= \{ \xi_n^2 \in R^1 : \xi_n^2 = K_\infty^2 - \lambda_n, \lambda_n \in \Lambda_1 \}, \\ \Lambda_2^\xi &= \{ \xi^2 \in R^1 : \xi^2 < K_\infty^2 \}, \\ K_\infty^2 &\leq \xi_n^2 < K_{\max}^2 = \max_z K^2(z), \quad \forall \xi_n^2 \in \Lambda_1^\xi. \end{aligned}$$

Має місце наступна теорема розкладу [4] : нехай $\psi(z) \in L^2(0, \infty)$ -неперервна функція при $z \in (0, \infty)$, тоді має місце розклад

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi^2) \varphi(z, \xi^2) d\sigma(\xi^2) = (F(\xi^2), \varphi(z, \xi^2))_{\sigma(\xi^2)}, \quad (2.54)$$

де функція $F(\xi^2)$ визначається інтегралом

$$F(\xi^2) = \int_0^\infty \psi(z) \varphi(z, \xi^2) dz = (\psi(z), \varphi(z, \xi^2))_z, \quad (2.55)$$

$\varphi(z, \xi^2)$ - розв'язок задачі (2.52), (2.45), (2.50), (2.53); $\sigma(\xi^2)$ носить назву спектральної функції, яка є монотонно зростаючою на неперервному спектрі і ступінчатою(кусочно-постійною) на дискретному спектрі з величиною стрибка γ_n^{-2} , де γ_n визначено нижче. Враховуючи наявність дискретного спектру (стрибків функції $\sigma(\xi^2)$) розклад (11) приводиться до вигляду

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^N \frac{F_n \varphi(z, \xi_n^2)}{\gamma_n^2} + \int_{-\infty}^{K_\infty^2} F(\xi^2) \varphi(z, \xi^2) d\sigma(\xi^2) \quad (2.56)$$

Тут

$$F_n = (\psi(z), \varphi(z, \xi_n^2))_z, \quad F(\xi^2) = (\psi(z), \varphi(z, \xi^2))_z,$$

$$\gamma_n^2 = (\varphi(z, \xi_n^2), \varphi(z, \xi_n^2))_z = \|\varphi(z, \xi_n^2)\|^2.$$

Крім того, мають місце співвідношення ортогональності

$$(\varphi(z, \xi_n^2), \varphi(z, \xi_m^2))_z = \gamma_n^2 \delta_{nm} \quad (2.57a)$$

для власних функцій дискретного спектру, та

$$(\varphi(z, \xi^2), \varphi(z, \xi'^2))_z = \delta(\xi^2 - \xi'^2) \quad (2.57b)$$

для власних функцій неперервного спектру [4]. Перехресний скалярний добуток власних функцій дискретного та неперервного спектру дорівнює нулю. Крім

того, система функцій $\varphi(z, \xi^2)$, які є розв'язком задачі (2.52), (2.45), (2.50), (2.53), утворюють повну систему функцій в $L^2(0, \infty)$ [4]. У випадку несамоспряженої задачі Штурма-Ліувілля (вище розглядалась самоспряжена задача) мають місце аналогічні розклади по біортогональній системі функцій, що є розв'язками задачі Штурма-Ліувілля, спряженої до вихідної [3]. Порядок обчислення спектральної функції $\sigma(\xi^2)$ наведено у роботі [4]. Так зокрема, для хвилевода Пекериса $\sigma(\xi^2) = \xi^2$ [5].

Враховуючи наведену теорему розкладу, будемо шукати розв'язок рівняння (2.49) у вигляді

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^N U_n(r) \varphi(z, \xi_n^2) + \int_{-\infty}^{K_\infty^2} U(r, \xi^2) \varphi(z, \xi^2) d\sigma(\xi^2) \quad (2.58)$$

Праву частину в (2.49) представимо у вигляді (2.56)

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \frac{F_n(r) \varphi(z, \xi_n^2)}{\gamma_n^2} + \int_{-\infty}^{K_\infty^2} F(r, \xi^2) \varphi(z, \xi^2) d\sigma(\xi^2) \quad (2.59)$$

Тут F_n та F визначаються з (2.55), а саме

$$F_n(r) = \left(f(x) \rho^{-1/2}(z), \varphi(z, \xi_n^2) \right)_z,$$

$$F(r, \xi^2) = \left(f(x) \rho^{-1/2}(z), \varphi(z, \xi^2) \right)_z.$$

Підставляючи вирази (2.58) та (2.59) у рівняння (2.49), домножаючи, далі, скалярно обидві його частини на функцію $\varphi(z, \xi^2)$ на інтервалі $z \in (0, \infty)$ на неперервному та дискретному спектрі і враховуючи співвідношення (2.57) та рівняння (2.51), маємо

$$(\Delta_{\perp} + \xi_n^2)U_n(r) = -F_n(r)\gamma_n^{-2}, \quad \xi_n^2 \in \Lambda_1^{\xi}, \quad (2.60)$$

$$(\Delta_{\perp} + \xi^2)U(r, \xi^2) = -F(r, \xi^2), \quad \xi^2 \in \Lambda_2^{\xi}. \quad (2.61)$$

Для однозначного розв'язку (2.60), (2.61) до них необхідно додати стандартні умови випромінювання для рівняння Гельмгольца в R^2 [6] $(\partial/\partial r - i\xi)U = o(r^{-1/2})$, $r \rightarrow \infty$. Тут U - розв'язок рівняння (2.60), або (2.61).

Знайдемо розв'язок задачі (2.60) (розв'язок задачі (2.61) знаходиться аналогічно). Застосовуючи до обох частин (2.60) пряме двовимірне перетворення Фур'є і знайшовши з отриманого алгебраїчного виразу значення образу, отримуємо за допомогою зворотнього перетворення сам розв'язок в наступному вигляді:

$$U_n(r) = -\gamma_n^{-2} \int_{R^2} \frac{\dot{F}_n(\xi') e^{i\xi' r}}{\xi_n^2 - k_x^2 - k_y^2} d^2 \xi' = -\gamma_n^{-2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\dot{F}_n(\xi', \varphi_1) e^{i\xi' r}}{\xi_n^2 - \xi'^2} \xi' d\varphi_1 d\xi'. \quad (2.62)$$

Тут

$$\dot{F}_n(\xi') = F[F_n](\xi') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} F_n(r) e^{-i\xi' r} d^2 r,$$

$$\xi' = (k_x, k_y) = (\xi', \varphi_1), \quad \xi' = |\xi'|.$$

Деформуванням шляху інтегрування в комплексних площинах ξ' та φ_1 , як показано у роботі [7], інтеграл (2.62) зводиться до вигляду

$$U_n(r) = -\gamma_n^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{i_{\infty}}^{-i_{\infty}} \frac{\dot{F}_n(\xi', \varphi + t) e^{i\xi' r \cos t}}{\xi_n^2 - \xi'^2} \xi' dt d\xi'.$$

Обчислення останнього інтегралу за змінною ξ' методом контурного інтегрування дає

$$U_n(r) = \frac{i\pi}{\gamma_n^2} \int_{i_\infty}^{-i_\infty} F_n(\xi_n, \varphi + t) e^{i\xi_n r \cos t} dt. \quad (2.63)$$

Враховуючи (2.63), отримуємо для модової частини розв'язу в (2.58) наступний вираз:

$$u_1(r, \varphi, z) = i\pi \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(z, \xi_n^2)}{\|\varphi(z, \xi_n^2)\|^2} \int_{i_\infty}^{-i_\infty} F_n(\xi_n, \varphi + t) e^{i\xi_n r \cos t} dt, \quad r, \varphi, z \in \Omega_\infty. \quad (2.64)$$

Після оцінки інтегралів в (21) методом перевалу аналогічно тому, як це здійснено у [1], отримуємо вираз для модової частини у наступному вигляді:

$$u_1(r, \varphi, z) \approx i(2\pi)^{1/2} \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(z_0, \xi_n^2) \varphi(z, \xi_n^2)}{\|\varphi(z, \xi_n^2)\|^2} e^{i(\xi_n r - \pi/4)} \sum_{k=0}^{\infty} D_{n,k}(\varphi) / (\xi_n r)^{k+1/2}. \quad (2.65)$$

Тут $D_{n,k}$ задовольняє рекурентному співвідношенню [1]

$$D_{n,k+1}(\varphi) = \frac{(\partial^2 / \partial \varphi^2 + k(k+1) + 1/4)}{2j(k+1)} D_{n,k}(\varphi), \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (2.66)$$

$$D_{n,0}(\varphi) = \pi F_n(\xi_n, \varphi) / \varphi(z_0, \xi_n^2) = \int_D f(x) \rho^{-1/2}(z) \varphi(z, \xi_n^2) e^{-i\xi_n r} d^3x / (4\pi \varphi(z_0, \xi_n^2)). \quad (2.67)$$

Границі інтегрування у останньому інтегралі при визначені $\dot{F}_n(\xi_n)$ звужені з Ω_∞ до області D внаслідок фінітності функції $f(x)$. Враховуючи (2.48), отримуємо остаточно з (2.65) вираз для модової складової тиску p_1 :

$$p_1(r, \varphi, z) \approx i(2\pi)^{1/2} \rho^{1/2}(z) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(z_0, \xi_n^2) \varphi(z, \xi_n^2)}{\|\varphi(z, \xi_n^2)\|^2} e^{i(\xi_n r - \pi/4)} \sum_{k=0}^{\infty} D_{n,k}(\varphi) / (\xi_n r)^{k+1/2}, \quad (2.68)$$

$$r, \varphi, z \in \Omega_{\infty}$$

Покладаючи, що у шарі Ω густина постійна $\rho(z) \equiv 1$, приходимо до того, що вираз (2.68) для модової складової тиску у шарі Ω зводиться до відповідного виразу для поля спрямованого випромінювача, отриманого в роботі [1] методом діаграмних функцій (вираз (20) роботи [1]). Вираз (2.67) зводиться у цьому випадку до виразу для діаграмної функції точкового джерела, еквівалентного данному джерелу (f, D) (вираз (2.64) роботи [1]).

Аналогічно отримуємо вираз для поля суцільного спектру випромінювача (f, D) :

$$p_2(r, \varphi, z) \approx j(2\pi)^{1/2} \rho^{1/2}(z) \int_{-\infty}^{K_0^2} \varphi(z_0, \xi^2) \varphi(z, \xi^2) e^{i(\xi r - \pi/4)} \sum_{k=0}^{\infty} D_k(\xi^2, \varphi) / (\xi r)^{k+1/2} d\sigma(\xi^2) \quad (2.69)$$

де D_k задовольняє рекурсії (2.66), а D_0 визначається з (24) при $\xi^2 \in \Lambda_2^{\xi}$.

Відмітимо також, що у випадку $f(x) = \delta(x - x_0)$ вирази (2.68), (2.69) зводяться до відповідних виразів для поля точкового джерела (див., наприклад, [3]).

Наведені тут результати відносяться до випадку $q \in L'(0, \infty)$. Якщо ця умова не виконується, можливі варіанти, огляд яких подано у роботі [8].

Використаний тут підхід можна розповсюдити на випадок, коли область Ω_1 представляє собою пружний напівпростір.

Також відмітимо, що при розв'язку задачі у трьохмірному випадку, також розв'язувалась задача для R^2 . Так розв'язок задачі

$$(\Delta_{\perp} + k^2)u = -F(r), \quad k = \text{const}, \quad r \in R^2,$$

представляється у вигляді (див. розв'язок рівняння (2.60))

$$u(r, \varphi) = i\pi \int_{i_\infty}^{-i_\infty} F(k, \varphi + t) e^{ikr \cos t} dt \approx (2\pi)^{1/2} i e^{i(kr - \pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\varphi) / (kr)^{n+1/2}. \quad (2.70)$$

Тут $D_n(\varphi)$ визначається рекурсією (2.66), а

$$D_0(\varphi) = \int_D F(k, \varphi) \pi = \int_D F(r) e^{-ikr} d^2 r / 4\pi, \quad k = (k, \varphi), \quad (2.71)$$

$D = \text{supp } F$. Як видно з (2.71), головний член асимптотики поля має вигляд

$$u(r, \varphi) \approx (2\pi)^{1/2} i \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(kr)^{1/2}} D_0(\varphi).$$

Таким чином, $D_0(\varphi)$ характеризує спрямованість джерела (F, D) і, як видно з (2.71), діаграма спрямованості цього джерела з точністю до постійного множника дорівнює сліду двохвимірному фур'є-образу правої частини $F(r)$ на колі радіусом k .

Аналогічно можна показати, що у випадку R^3 діаграма спрямованості випромінювача (f, D) дорівнює сліду трьохмірного фур'є-образу на сферу радіусом k , де k -хвильове число.

1.4 Аналітичні розв'язки просторових хвильових задач для рівняння Гельмгольца

Розглянемо деякі характерні базові просторові акустичні задачі для рівняння Гельмгольца, розв'язання яких зводиться, з урахуванням симетрії, до дослідження одновимірних задач. Отримані аналітичні розв'язки мають важливе

значення в застосуваннях, оскільки описують найбільш важливі хвильові процеси : збіжні (розбіжні) сферичні, циліндричні та плоскі хвилі.

1.4.1 Акустичне поле кулі

Нехай джерело хвиль розподілено в кулі радіуса a

$$G_a = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < a \}$$

зі сталою густиною f_0 ,

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} f_0, & \mathbf{x} \in G_a, \\ 0, & \mathbf{x} \notin G_a. \end{cases} \quad (3.1)$$

Тоді задача випромінювання зводиться до розв'язання рівняння Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.2)$$

Умови випромінювання на нескінченності при $k = k_0 + ik_1$, $\text{Im } k > 0$ мають вигляд

$$p(\mathbf{x}) = e^{-\text{Im } kr} O(r^{-1}), \quad \frac{\partial p}{\partial r} - ikp = e^{-\text{Im } kr} o(r^{-1}) \quad \text{при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Використовуючи представлення оператора Лапласа в сферичних координатах (r, θ, φ) , рівняння Гельмгольца (3.2) з урахуванням сферичної симетрії запишемо у вигляді:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + k^2 p = -f_0, \quad r < a, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial p}{\partial r}) + k^2 p = 0, \quad r > a. \quad (3.5)$$

Якщо однорідне рівняння (3.5) переписати у вигляді

$$\frac{d^2}{dr^2} (rp) + k^2 rp = 0,$$

то отримаємо два лінійно незалежні розв'язки вигляду

$$a_1 \frac{e^{ikr}}{r}, \quad a_2 \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad a_1, a_2 - \text{Const} \quad (3.6)$$

відповідно.

Так як умовам випромінювання задовольняє лише перший вираз в (3.6), то загальний розв'язок рівняння Гельмгольца (3.5) має вигляд

$$p_1 = a_1 e^{ikr} / r, \quad (3.7)$$

де a_1 – довільна стала величина.

Неоднорідне рівняння (3.4) за допомогою заміни $p = p_0 + f_0 / k^2$ можна звести до однорідного, загальний розв'язок якого в області $r < a$ записується у вигляді

$$p_0 = a_2 \frac{\sin kr}{r} + a_3 \frac{\cos kr}{r},$$

де a_2, a_3 – довільні сталі.

Із умови обмеженості випливає $a_3 = 0$, тому загальний розв'язок рівняння (3.4), що не містить особливостей при $r = 0$, визначається формулою

$$p_2(r) = a_2 \frac{\sin kr}{r} - \frac{f_0}{k^2}. \quad (3.8)$$

Довільні сталі у виразах (3.7) - (3.8) визначимо із умови рівності розв'язків та їх похідних при $r=a$. Тоді після нескладних перетворень одержимо

$$a_1 = \frac{f_0}{k^3} (\sin ka - ka \cos ka), \quad a_2 = -\frac{f_0}{k^3} (ika - 1)e^{ika}.$$

Остаточно аналітичний розв'язок задачі (3.1) - (3.3) визначається наступними формулами:

$$p(\mathbf{x}) = p_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{f_0}{k^3} (ika - 1)e^{ika} \frac{\sin kr}{r} - \frac{f_0}{k^2}, & r \leq a, \\ \frac{f_0}{k^3} (\sin(ka) - ka \cos(ka)) \frac{e^{ikr}}{r}, & r \geq a. \end{cases} \quad (3.9)$$

З іншого боку, розв'язок задачі (3.1) - (3.3) можна представити за допомогою фундаментального розв'язку оператора Гельмгольца

$$p(\mathbf{x}) = \iiint \varepsilon_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\tau_y,$$

де $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ - евклідова відстань між точками \mathbf{x} та \mathbf{y} , а

$$\varepsilon_3(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi |\mathbf{x}|}. \quad (3.10)$$

Легко бачити, що зовнішнє поле ($r \leq a$) в (3.9) відрізняється від сингулярного розв'язку $\varepsilon_3(\mathbf{x})$ лише сталим множником і збігається з ним за умови

$$f_0 = f_a = \frac{k^3}{4\pi(\sin ka - ka \cos ka)}. \quad (3.11)$$

Таким чином, параметричне сімейство об'ємних джерел (G_a, f_a) випромінює одне і теж зовнішнє поле і відрізняються тільки своїм внутрішнім полем.

Розглянемо граничний випадок, коли $a \rightarrow 0$. В цьому випадку густина f , яка визначається формулами (3.1), (3.11), прямує до δ -функції Дірака у сенсі узагальнених функцій, тобто

$$\langle f, \varphi \rangle \rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \text{ при } a \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3),$$

де $D(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно диференційованих фінітних в \mathbb{R}^n функцій,

$$\langle f, \varphi \rangle = \iiint f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\tau.$$

Справедливість цього твердження легко отримати, використовуючи теорему про середнє, згідно з якою

$$\langle f, \varphi \rangle = \varphi(\xi) f_a \text{mes} G_a, \quad \xi \in G$$

і враховуючи, що $\lim_{a \rightarrow 0} \xi = 0$ та $\lim_{a \rightarrow 0} f_a \text{mes} G_a = 1$. Останнє твердження легко встановлюється, використовуючи правило Лапіталя. Дійсно, маємо

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_a \text{mes} G_a = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^3 k^3}{3(\sin ka - ka \cos ka)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2 k^2}{ka \sin ka} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ak}{\sin ka} = 1$$

Легко бачити, що при $a \rightarrow 0$ розв'язок (3.9) прямує до сингулярного розв'язку (3.10) в кожній точці $\mathbf{x} \neq 0$, і для збіжності, крім того, справедливе співвідношення (детальні викладки проведені в наступному підрозділі для двовимірного випадку)

$$\iiint_{G_a} |p_a(\mathbf{x}) - \varepsilon_3(\mathbf{x})| d\tau \rightarrow 0 \text{ при } a \rightarrow 0.$$

Таким чином, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 3.1. Нехай $a \rightarrow 0$. Тоді густина f , яка визначається формулами (3.1), (3.11), прямує до δ -функції Дірака в сенсі узагальнених функцій: $\langle f, \varphi \rangle \rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3)$; розв'язок (3.9) прямує до фундаментального розв'язку в кожній точці $\mathbf{x} \neq 0$, причому $\iiint_{G_a} |p_a(\mathbf{x}) - \varepsilon_3(\mathbf{x})| d\tau \rightarrow 0$.

Оскільки при $a \rightarrow 0$ акустичне поле, що випромінюється параметричним об'ємним джерелом (G_a, f_a) , збігається із сингулярним розв'язком, то це означає, що поле задовольняє рівнянню Гельмгольца з правою частиною у вигляді δ -функції Дірака

$$\Delta p + k^2 p = -\delta(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

в сенсі узагальнених функцій. Розглядуване поле визначає розбіжну сферичну хвилю (хвилю, розбіжну від центра $\mathbf{x}=0$ із сферичним фронтом).

Аналогічно можна показати, що інший фундаментальний розв'язок оператора Гельмгольца (комплексно-спряженій до $\varepsilon_3(x)$)

$$\bar{\varepsilon}_3(x) = \frac{e^{-ik|x|}}{4\pi |x|}$$

задовольняє рівнянню (3.12) в сенсі узагальнених функцій, однорідному рівнянню Гельмгольца в кожній точці $x \neq 0$, умовам випромінювання на нескінченності

$$p(x) = e^{imkr} O(r^{-1}), \quad \frac{\partial p}{\partial r} + ikp = e^{imkr} o(r^{-1}), \quad \text{при } r = |x| \rightarrow \infty \quad (3.13)$$

та описує сферичну хвилю, збіжну до точки $x = 0$.

Із викладеного випливає важливий висновок, що параметричне сімейство джерел (G_a, f_a) створює одне і те ж зовнішнє поле. Тому обернена задача відновлення випромінюючої системи за заданим зовнішнім полем має сімейство розв'язків, залежних від параметра $a \in (0, R)$. Така властивість свідчить про суттєву некоректність оберненої задачі випромінювання звуку.

1.4.2 Звукове поле об'ємного циліндра

Припустимо, що об'ємні джерела розподілені рівномірно із сталою густиною f_0 всередині циліндра радіуса a , вісь якого співпадає з віссю x_3 декартової системи координат (x_1, x_2, x_3) . Згідно постановки, розв'язок задачі не залежить від x_3 . Це означає, що потрібно розглядати плоский випадок в \mathbb{R}^2 , вважаючи джерела випромінювання рівномірно розподіленими в крузі

$$G_a = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < a \right\}.$$

Таким чином, задача випромінювання зводиться до розв'язання рівняння Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = -f(x), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{Im} k \geq 0 \quad (3.14)$$

з правою частиною

$$f(x) = \begin{cases} f_0, x \in G_a, \\ 0, x \notin G_a \end{cases}. \quad (3.15)$$

Відповідні умови випромінювання на нескінченності приймають вигляд

$$p(x) = e^{-\operatorname{Im} kr} O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial p}{\partial r} - ikp = e^{-\operatorname{Im} kr} o(r^{-1/2}), \text{ при } r = |x| \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

Як відомо, для рівняння (3.14) з фінітною правою частиною (3.15), існує єдиний розв'язок, що задовольняє умовам випромінювання (3.16). Цей розв'язок представляється у вигляді згортки фундаментального розв'язку двовимірного оператора Гельмгольца

$$\varepsilon_2(x) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.17)$$

і правої частини (3.15):

$$p(x) = \frac{i}{4} \iint_{G_a} H_0^{(1)}(k|x-y|) f(y) dS_y, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.18)$$

Тут, як і раніше, $|x-y|$ - евклідова відстань між точками x та y .

Отримаємо розв'язок рівняння Гельмгольца (3.13), враховуючи симетрію задачі за азимутом. Використовуючи представлення оператора Лапласа в циліндричних координатах (r, φ, z) і приймаючи до уваги незалежність розв'язку від координат (φ, z) , маємо два рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + k^2 p = -f_0, r < a \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + k^2 p = 0, r > a \quad (3.20)$$

Рівняння (3.20) зводиться до рівняння Бесселя нульового порядку, загальний розв'язок якого має вигляд

$$p(r) = a_1 H_0^{(1)}(kr) + a_2 H_0^{(2)}(kr)$$

де $H_0^{(1,2)}(kr)$ - функції Ханкеля першого (другого роду), a_1, a_2 - довільні сталі. Легко бачити, що умовам випромінювання (3.16) задовольняє вираз

$$p(r) = a_1 H_0^{(1)}(kr). \quad (3.21)$$

Як і в попередньому пункті зведемо рівняння (3.19) до однорідного і врахуємо, що регулярним при $r = 0$ розв'язком отриманого рівняння являється функція Бесселя $J_0(kr)$. Тому частинний розв'язок рівняння (3.19) одержимо у вигляді

$$p_2 = a_2 J_0(kr) - \frac{f_0}{k^2}.$$

Визначаючи сталі a_1, a_2 із умови неперервності розв'язків (3.21)-(3.22) та їх похідних при $r = a$, в результаті маємо

$$a_1 = \frac{J_0'(ka)f_0}{k^2\gamma}, a_2 = \frac{H_0^{(1)'}(ka)f_0}{k^2\gamma}, \quad (3.22)$$

де

$$\gamma = -H_0^{(1)}(ka)J_0'(ka) + H_0^{(1)'}(ka)J_0(ka),$$

$$J_0'(ka) = \left. \frac{dJ_0(z)}{dz} \right|_{z=ka}, H_0^{(1)'}(ka) = \left. \frac{dH_0^{(1)}(z)}{dz} \right|_{z=ka}.$$

Таким чином, розв'язок задачі (3.14)-(3.16) можна записати у вигляді

$$p(x) = p_a(x) = \begin{cases} \frac{f_0 H_0^{(1)'}(ka)}{k^2 \gamma} J_0(kr) - \frac{f_0}{k^2}, r \leq a, \\ \frac{f_0 J_0'(ka)}{k^2 \gamma} H_0^{(1)}(kr), r \geq a. \end{cases} \quad (3.23)$$

Порівняння виразів (3.17) і (3.23) показує, що поле сингулярного розв'язку збігається із зовнішнім полем $p_a(r)$ за умови

$$f_0 = f_a = \frac{i}{4} \frac{k^2 \gamma}{J_0'(ka)}. \quad (3.24)$$

В граничному випадку ($a \rightarrow 0$) густина f , яка визначається формулами (3.15) і (3.24), прямує до двовимірної δ -функції в сенсі узагальнених функцій. Схема доведення даного твердження аналогічна попередньому. Зауважимо лише, що в даному випадку потрібно врахувати асимптотичні формули

$$H_0^{(1)}(ka) \approx \frac{2i}{a} \ln ka, \quad \frac{dH_0^{(1)}(ka)}{dr} = -H_0^{(1)}(ka) \approx \frac{2i}{\pi ka}, \quad \frac{J_0(ka)}{J_0'(ka)} \approx -\frac{2i}{ka}.$$

Тому

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_a \text{mes} G_a = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{ik^2 a^2 \pi}{4} \left(-H_0^{(1)}(ka) + H_1^{(1)}(ka) \frac{J_0(ka)}{J_0'(ka)} \right) \right\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{k^2 a^2}{2} \left(\ln ka + \frac{2}{k^2 a^2} \right) = 1.$$

Доведемо збіжність при $a \rightarrow 0$ розв'язку (3.23) до сингулярного розв'язку (3.14) в середньому, тобто встановимо справедливість співвідношення

$$\iint_{G_a} |p_{a(x)} - \varepsilon_2(x)| dS \rightarrow 0 \quad \text{при } a \rightarrow 0. \quad (3.25)$$

Для цього в інтегралі перейдемо до полярних координат і врахуємо вираз (3.23). Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \iint_{G_a} |p_a(x) - \varepsilon_2(x)| dS &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a |p_a(x) - \varepsilon_2(x)| r dr = \lim_{a \rightarrow 0} 2\pi \int_0^a \left| p_a(r) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \right| r dr = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} 2\pi \int_0^a \left| \frac{i}{4} J_0(kr) \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{J_0'(ka)} + \frac{i}{4} \left\{ H_0^{(1)}(ka) - \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{J_0'(ka)} J_0(ka) \right\} - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \right| r dr = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} 2\pi \int_0^a \left| \frac{i}{4} \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{J_0'(ka)} (J_0(kr) - J_0(ka)) + \frac{i}{4} \{ H_0^{(1)}(ka) - H_0^{(1)}(kr) \} \right| r dr = \\ &\leq \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a}{2} \int_0^a \left| \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{J_0'(ka)} (J_0(kr) - J_0(ka)) \right| dr + \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a}{2} \int_0^a |H_0^{(1)}(ka) - H_0^{(1)}(kr)| dr = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a^2}{2} \left| \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{J_0'(ka)} (J_0(k\xi) - J_0(ka)) \right| = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a^2}{2} O(a^{-2}) |(J_0(k\xi) - J_0(ka))| = 0, \xi \in (0, a). \end{aligned}$$

Тепер можна сформулювати таку теорему.

Теорема 3.2. Нехай $a \rightarrow 0$. Тоді густина f , яка визначається формулами (3.15), (3.24), прямує до двовимірної δ -функції Дірака в сенсі узагальнених функцій; розв'язок (3.23) прямує до фундаментального розв'язку в кожній точці $x \neq 0$, і має місце збіжність в середньому (3.25).

Оскільки границею параметричного джерела (G_a, f_a) при $a \rightarrow 0$ є точкове джерело $(0, \delta(x))$, то сингулярний розв'язок (3.17) має фізичний зміст поля, створюваного точковим джерелом в \mathbb{R}^2 . Зауважимо також, що акустичне поле сингулярного розв'язку (3.17) можна трактувати також в \mathbb{R}^3 як поле точкових джерел, що заповнюють суцільно весь x_3 . При $kr \gg 1$ функція (3.17) описує розбіжну хвилю з циліндричним фронтом.

Інший сингулярний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца

$$\bar{\varepsilon}_2(x) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

задовольняє умовам випромінювання на нескінченності

$$p(x) = e^{imkr} O(r^{-1/2}), \frac{\partial p}{\partial r} + ikp = e^{imkr} o(r^{-1/2}), \text{ при } r = |x| \rightarrow \infty$$

1.4.3 Поле об'ємного шару

Розглянемо випадок, коли об'ємні джерела розподілені рівномірно із сталою густиною f_0 в шарі

$$G_a = \{x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (y, z) \in \mathbb{R}^2, |x| < a\}$$

Із постановки задачі випливає, що розв'язок не залежить від змінних (y, z) і можна розглядати на осі $x \in \mathfrak{R}$, вважаючи, що джерела розподілені рівномірно в інтервалі $\Omega_a = (-a, a)$ із фінітною густиною f_0 .

Позначимо далі

$$f(x) = \begin{cases} f_0, & x \in G_a, \\ 0, & x \notin G_a. \end{cases} \quad (3.26)$$

Умови Зоммерфельда в цьому випадку мають вигляд

$$p(x) = e^{-\text{Im}|x|} O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial p}{\partial |x|} - ikp = e^{-\text{Im}|x|} o(1), \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (3.27)$$

Розв'язок одновимірного рівняння Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = -f(x), \quad x \in \mathfrak{R}, \quad \text{Im } k \geq 0, \quad (3.28)$$

де права частина визначається (3.26), може бути записаний у вигляді згортки фундаментального розв'язку оператора Гельмгольца

$$\varepsilon_1(x) = \frac{i}{2k} e^{ik|x|} \quad (3.29)$$

і правої частини:

$$p(x) = \iiint_{G_a} \varepsilon_1(x-y) f(y) \partial y. \quad (3.30)$$

На відміну від попередніх випадків інтеграл в (3.29) легко обчислюється, в результаті розв'язок задачі можна представити у вигляді

$$p(x) = p(x)_a = \begin{cases} \frac{f_0}{k^2} e^{ika} \cos kx - \frac{f_0}{k^2}, |x| \leq a, \\ i \frac{f_0}{k^2} \sin(ka) e^{ik|x|}, |x| \geq a. \end{cases} \quad (3.31)$$

Зауважимо, що вираз (3.31) можна отримати, розв'язуючи рівняння

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + k^2 p = -f_0, |x| < a, \quad (3.32)$$

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + k^2 p = 0, |x| \geq a. \quad (3.33)$$

Розв'язком рівняння (3.32), який задовольняє умовам випромінювання (3.27), являється функція

$$p_2(x) = a_2 e^{ik|x|}, |x| \geq a,$$

а розв'язком (3.32) є вираз

$$p_1(x) = a_1 \cos kx - \frac{f_0}{k^2}, |x| \leq a.$$

Визначаючи довільні сталі із умов спряження розв'язку при $|x|=a$, прийдемо до виразу (3.31).

Зовнішнє поле за формулою (3.31) збігається з фундаментальним розв'язком (3.25) за умови

$$f_0 = f_a = \frac{k}{2 \sin ka}. \quad (3.34)$$

Легко бачити, що густина f , яка визначається формулами (3.26), (3.34), при $a \rightarrow 0$ прямує до одновимірної δ -функції Дірака $\delta(x)$, а розв'язок (3.31) при $f_0 = f_a$ прямує до сингулярного розв'язку (3.29) в кожній точці $x \neq 0$. Збіжність в середньому являється наслідком наступних перетворень. За означенням маємо

$$\begin{aligned}
& \lim_{a \rightarrow 0} \int_{G_a} |p_a(x) - \varepsilon_2(x)| dx = \\
& = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^a \left| \frac{1}{2k \sin ka} (e^{ika} \cos x - 1) - \frac{i}{2k} e^{ik|x|} \right| dx = \\
& = \lim_{a \rightarrow 0} 2 \int_0^a \left| \frac{1}{2k \sin ka} (e^{ika} \cos x - 1) - \frac{i}{2k} e^{ikx} \right| dx = \\
& = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^a \left| \frac{1}{\sin ka} (e^{ika} \cos x - 1) - i e^{ikx} \right| dx = \\
& = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{k \sin ka} \int_0^a |(\cos kx + i \sin kx) \cos ka - 1 - i(\cos kx + i \sin kx) \sin ka| dx = \\
& = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{k \sin ka} \int_0^a |\cos kx \cos ka - 1 - \sin kx \sin ka| dx = \\
& = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{k \sin ka} \int_0^a |\cos k(x-a) - 1| dx = \\
& = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{k \sin ka} \int_0^a (1 - \cos(k(a-x))) dx = \\
& = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{k \sin ka} \left(a + \frac{\sin k(a-x)}{k} \Big|_0^a \right) = \\
& = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{k \sin ka} \left(a - \frac{\sin ka}{k} \right) = 0
\end{aligned}$$

Граничний випадок параметричного джерела (G_a, f_a) при $a \rightarrow 0$ називається монополем в \mathfrak{R} . Таким чином, сингулярний розв'язок (3.29) можна трактувати як поле, створюване монополем $(0, \delta(x))$. З фізичної точки зору розв'язок $\varepsilon_1(x)$ природно розглядати в \mathfrak{R}^3 як акустичне поле джерел, що суцільно заповнюють площину $x=0$. Випромінювальне поле представляє собою розбіжну плоску хвилю, що поширюється від площини $x=0$ в різні боки.

Другий сингулярний розв'язок одновимірного оператора Гельмгольца

$$\overline{\varepsilon}_1(x) = -\frac{i}{2k} e^{-ik|x|}.$$

Задовольняє рівнянню (3.28) в сенсі узагальнених функцій, умовам випромінювання на нескінченності

$$p(x) = e^{\operatorname{Im}|x|} O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial p}{\partial |x|} + ikp = e^{\operatorname{Im}|x|} o(1)$$

та описує амплітуду плоскої хвилі з фронтом, збіжним до площини $x=0$.

Очевидно, що вирази

$$\varepsilon_1(x - x_0) = \frac{i}{2k} e^{ik|x - x_0|},$$

$$\overline{\varepsilon}_1(x - x_0) = -\frac{i}{2k} e^{-ik|x - x_0|}.$$

відповідно описують розбіжні та збіжні плоскі хвилі точкового джерела, розташованого в точці $x_0 \neq 0$.

1.5 Розв'язування хвильових рівнянь в областях з імпедансною границею методом нормальних мод

Розглянемо задачу знаходження поля точкового гармонічного джерела в неоднорідному хвилеводі скінченної глибини. Важливість таких задач для практики пояснюється можливістю побудови поля довільного об'ємного джерела, використовуючи розв'язок канонічної задачі.

1.5.1 Неоднорідний осесиметричний хвильовід з імпедансною границею

Нехай точкове джерело розташоване в хвильоводі, який представляє собою шар

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < z < H\}$$

з імпедансною нижньою границею $z=H$ і абсолютно м'якою верхньою границею $z=0$ (вісь z направлена вертикально вниз), $k = \omega / c(z)$, де $c(z)$ – непервна швидкість звуку.

В точці $M_0 = (0, 0, z_0)$, $0 < z_0 < H$ розташоване точкове гармонічне джерело, що випромінює в однорідному просторі \mathbb{R}^3 хвилю $p_0 = (4\pi R)^{-1} \exp(ikR - i\omega t)$.

В циліндричній системі координат (r, φ, z) тривимірна дельта-функція Дірака $\delta(M - M_0)$, $M = (x, y, z)$ визначається формулою

$$\delta(M - M_0) = \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - z_0).$$

Тому в осесиметричному хвильоводі акустичний тиск задовольняє рівнянню Гельмгольца

$$\Delta p + k^2(z)p = - \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - z_0), (r, z) \in G, \quad (4.1)$$

на границі крайовим умовам

$$p|_{z=0} = 0, \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \alpha p \right) \Big|_{z=H} = 0 \quad (4.3)$$

де коефіцієнт α - деякий дійсний параметр ($\text{Im } \alpha = 0$), і умовам випромінювання на нескінченності.

В подальшому будемо розглядати два випадки: $\text{Im } k(z) > 0$ та $\text{Im } k(z) = 0$ ($k = k_1 + ik_2$).

Розв'язок однорідного рівняння

$$\Delta p + k^2(z)p = 0, (r, z) \in G, \quad (4.4)$$

який задовольняє крайовим умовам (4.2)-(4.3), отримаємо методом нормальних мод. Для цього представимо розв'язок рівняння у вигляді

$p(r, z) = \psi(r) \varphi(z)$ і підставимо в (4.4). В результаті прийдемо до наступної задачі Штурмана- Ліувілля для функції φ :

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + k^2(z) \varphi = \xi^2 \varphi, 0 < z < H, \quad (4.5)$$

$$\varphi(0) = 0, \frac{d\varphi(H)}{dz} + \alpha \varphi(H) = 0. \quad (4.6)$$

Для дослідження спектральної задачі (4.5)-(4.6) розглянемо гільбертовий простір комплексних функцій, інтегрованих з квадратом на $(0, H)$ зі скалярним добутком і нормою

$$(u, v) = \int_0^H u(z) \bar{v}(z) dz, \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

За допомогою оператора

$$A = \frac{d^2}{dz^2} + k^2(z),$$

визначеного на множині функцій $u(z) \in C^2[0, H]$, задовольняючих умовам (4.6), задачу (4.5)-(4.6) можна записати в операторному вигляді

$$A\varphi = \alpha\varphi, \lambda = \xi^2, \varphi \in D(A), \quad (4.7)$$

де $D(A)$ - область означення оператора A .

Інтегруючи частинами, легко впевнитись, що

$$(Au, v) = \int_0^H u \left(\frac{d^2 \bar{v}}{dz^2} + k^2(z) \bar{v} \right) dz, \quad u, v \in D(A). \quad (4.8)$$

Співвідношення (4.8) означає, що спряжений оператор A^* має вигляд

$$A^*u = \bar{A}u, \bar{A} = \frac{d^2}{dz^2} + \bar{k}^2(z). \quad (4.9)$$

Звідси випливає, що оператор A є самоспряженим за умови $\text{Im } k=0$ і несамопряженим, якщо $\text{Im } k \neq 0$. При цьому, якщо власне значення λ являється

власним значенням оператора A з відповідною власною функцією φ , то пара $(\bar{\lambda}, \bar{\varphi})$ є розв'язком задачі на власні значення для оператора A^* .

Як відомо, задача (4.5)-(4.6) має лічену множину простих власних значень $\lambda_n = \xi_n^2, n = 1, 2, \dots$ з єдиною граничною точкою на нескінченності і відповідних власних значень $\{\varphi\}_{n=1}^\infty$. Вказані власні значення при $\text{Im } k = 0$ можуть бути впорядковані $\max k^2(z) > \xi_1^2 > \xi_2^2 > \dots > \xi_n^2 > \dots \rightarrow -\infty$,

а відповідні їм власні функції дійсні і утворюють повну ортогональну в $L_2(0, H)$ систему.

Покажемо, що в загальному випадку (при $\text{Im } k > 0$) власні значення комплексні з додатною уявною частиною, а відповідні власні функції утворюють біортогональну систему з власними функціями спряженої задачі, тобто, функціями $\bar{\varphi}_n(z)$.

Для доведення розглянемо комплексно-спряжену до задачі (4.5)-(4.6) задачу Штурма-Ліувілля

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dz^2} + \bar{k}^2(z) \bar{\varphi} = \xi^2 \bar{\varphi}, 0 < z < H, \quad (4.10)$$

$$\bar{\varphi}(0) = 0, \frac{d\bar{\varphi}(H)}{dz} + \alpha \bar{\varphi}(H) = 0. \quad (4.11)$$

Позначивши $\lambda_n = \xi_n^2$ і використовуючи інтегрування частинами, для розв'язків задач (4.5)-(4.6) і (4.10)-(4.11) отримаємо відповідно тотожності

$$\lambda_n(\varphi_n, \varphi_n) = \int_0^H \varphi_n \frac{d^2 \overline{\varphi_n}}{dz^2} dz + \int_0^H k^2(z) |\varphi_n|^2 dz,$$

$$\overline{\lambda_n}(\overline{\varphi_n}, \overline{\varphi_n}) = \int_0^H \overline{\varphi_n} \frac{d^2 \overline{\varphi_n}}{dz^2} dz + \int_0^H \overline{k^2}(z) |\overline{\varphi_n}|^2 dz.$$

Різниця отриманих виразів приводить до співвідношення

$$\operatorname{Im}(\lambda_n) \|\varphi_n\|^2 = \int_0^H \operatorname{Im}(k^2) |\varphi_n|^2 dz.$$

Так як $\operatorname{Im}(k^2) = 2k_1 k_2 \geq 0$, то звідси остаточно випливає висновок, що $\operatorname{Im}(\lambda_n) \geq 0$ при $\operatorname{Im}(k) \geq 0$.

В подальшому будемо вважати, що при $\operatorname{Im}(k) \geq 0$ для довільного n справедливо $\operatorname{Re} \xi_n \geq 0, \operatorname{Im} \xi_n \geq 0$. Для цього значення ξ_n потрібно брати наступним чином:

$$\xi_n = \sqrt{|\lambda_n|} \exp(i\theta_n), \theta_n = \frac{1}{2} \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \lambda_n}{\operatorname{Re} \lambda_n}, \operatorname{Re} \lambda_n > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \lambda_n}{\operatorname{Re} \lambda_n} + \pi, \operatorname{Re} \lambda_n < 0 \\ \pi, \lambda_n < 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

В цьому випадку величини ξ_n розташовані в першому квадранті комплексної площини ξ .

Відзначимо, що встановлені властивості задачі Штурма-Ліувілля (4.5)-(4.6) можна отримати, виходячи із операторного представлення спектральної задачі (4.7). Дійсно, оскільки $\lambda_n \varphi_n = A \varphi_n$, то

$$\lambda_n \|\varphi_n\|^2 = (A\varphi_n, \varphi_n),$$

$$\operatorname{Im} \lambda_n \|\varphi_n\|^2 = (A\varphi_n, \varphi_n)$$

Враховуючи далі, що

$$\operatorname{Im} \lambda_n \|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{2i} \left\{ (A\varphi_n, \varphi_n) - (A^* \varphi_n, \varphi_n) \right\} = \frac{1}{2i} ((A - A^*)\varphi_n, \varphi_n)$$

і співвідношення (4.9) отримаємо

$$\operatorname{Im}(A\varphi_n, \varphi_n) = (\operatorname{Im}(k^2)\varphi_n, \varphi_n),$$

тобто $\operatorname{Im}(\lambda_n) \geq 0$, якщо $\operatorname{Im}(k) > 0$.

Тепер покажемо, що для власних функцій справедливе співвідношення

$$(\varphi_n, \overline{\varphi_m}) = \int_0^H \varphi_n(z) \varphi_m(z) dz = \begin{cases} 0, n \neq m \\ y_n^2, n = m. \end{cases} \quad (4.13)$$

При цьому $y_n^2 > 0$, якщо $\operatorname{Im} k = 0$ і стає комплексною величиною у випадку

$\operatorname{Im} k > 0$.

Нехай λ_n, λ_m - власні значення, яким відповідають власні функції $\varphi_n(z), \varphi_m(z)$ відповідно, тобто

$$\lambda_n \varphi_n = A\varphi_n, \quad \lambda_m \varphi_m = A\varphi_m. \quad (4.14)$$

Тоді, користуючись інтегрування частинами, отримаємо

$$(A\varphi_n, \bar{\varphi}_m) = \int_0^H \varphi_n \left(\frac{d^2 \varphi_m}{dz^2} + k^2 \varphi_m \right) dz = (A\varphi_m, \bar{\varphi}_n).$$

Звідси, з урахуванням (4.14) випливає рівність

$$\lambda_n(\varphi_n, \bar{\varphi}_m) = \lambda_m(\varphi_m, \bar{\varphi}_n)$$

або $(\lambda_n - \lambda_m)(\varphi_n, \bar{\varphi}_m) = 0$, що і доводить справедливості властивості (4.13).

Побудуємо тепер розв'язок однорідного рівняння (4.4), враховуючи умови випромінювання на нескінченності при $\text{Im } k > 0$ у вигляді

$$p(r, z) = O(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (4.15)$$

і

$$\frac{d\varphi_n}{dr} - i\xi_n \varphi_n = o(r^{-1/2}), r \rightarrow \infty, n = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

у випадку $\text{Im } k = 0$.

Так як вказаним умовам відповідає тільки функція $H_0^{(1)}(\cdot)$, то частковий розв'язок рівняння (4.4) має вигляд

$$p_n(r, z) = a_n \varphi_n(z) H_0^{(1)}(\xi_n r), \varphi_n(z) = \varphi(z, \lambda_n).$$

Представимо далі розв'язок крайової задачі (4.1)-(4.3) у вигляді суми так званих нормальних мод

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z) H_0^{(1)}(\xi_n r). \quad (4.17)$$

Скористаємось для визначення сталих a_n методом варіації довільних змінних, Для цього підставимо (4.17) в неоднорідне рівняння (4.1), враховуючи тотожність для власної функції φ_n . Тоді маємо

$$\begin{aligned} \Delta p + k^2(z)p &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2(z)p = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta + k^2(z)) p_n(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z) \right) \varphi_n(z) H_0^{(1)}(\xi_n r) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \xi_n^2 \right) \varphi_n(z) H_0^{(1)}(\xi_n r). \end{aligned}$$

Прийнявши далі до уваги, що

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \xi_n^2 \right) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\xi_n r) = -\frac{\delta(r)}{2\pi r},$$

останню тотожність можна записати у вигляді

$$\Delta p + k^2(z)p = -\frac{i}{4} \frac{\delta(r)}{2\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z).$$

Це означає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z) = \frac{i}{4} \delta(z - z_0). \quad (4.18)$$

Помноживши (4.18) на $\varphi_m(z)$ і проінтегрувавши на відрізку $(0, H)$, в силу ортогональності (біортогональності при $\text{Im } k > 0$) функцій $\varphi_m(z)$, одержимо значення для коефіцієнтів:

$$a_m = \frac{i}{y_n^2} \varphi_n(z_0). \quad (4.19)$$

Підставляючи вираз (4.19) в (4.17), в результаті одержимо нормально-модове представлення звукового поля (розв'язок крайової задачі (4.1)-(4.3)):

$$p(r, z) = \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z_0) \varphi_n(z) H_0^{(1)}(\xi_n r) / y_n^2. \quad (4.20)$$

Отже, справедлива

Теорема 4.1. Для розв'язку крайової задачі (4.1)-(4.3) з урахуванням умов випромінювання на нескінченності справедлива формула (4.20).

Зауважимо, що ряд (4.20) збігається абсолютно і рівномірно в досліджуваній області. При $\text{Im } k = 0$ перші N членів суми (мод) поширюються, а останні - затухають на нескінченності. Тут N - ціле число, таке, що $\xi_N^2 > 0 > \xi_{N+1}^2$. Якщо $\text{Im } k > 0$, то всі моди затухають на нескінченності.

1.5.2 Неоднорідний осесиметричний хвилевід з поглинанням на границі вода-дно

Значний інтерес представляють задачі моделювання звукового поля, коли параметр α в граничній умові третього роду являється комплексним. Така модель дозволяє описати звукове поле точкового джерела у вигляді дискретних модових компонентів і врахувати втрати енергії із водного шару в дно. Як буде

далі показано, крайова умова (4.3) при $\text{Im } \alpha < 0$ відповідає поглинаючій границі.

У відповідності з припущеннями, акустичний тиск точкового гармонічного джерела з координатами $(0, 0, z_0)$ в осесиметричному хвилеводі

$G = \{(r, z): 0 < r < \infty, 0 < z < H\}$ з неперервною швидкістю звуку $c(z)$

задовольняє рівнянню

$$\Delta p + k^2(z)p = -\frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - z_0), (r, z) \in G, \quad (4.21)$$

і крайовим умовам

$$p|_{z=0} = 0, \quad (4.22)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \alpha p \right) \Big|_{z=H} = 0, \quad (4.23)$$

де α – комплексний параметр, $\alpha = \text{Re } \alpha + i \text{Im } \alpha$, $\text{Im } \alpha \neq 0$, $\text{Im } k = 0$. На нескінченності будемо вимагати виконання принципу граничного поглинання при $\text{Im } k > 0$ та парціальних умов вигляду (4.16), якщо $\text{Im } k(z) = 0$.

Розглянемо відповідну несамопряжену задачу Штурма-Ліувілля, аналогічну задачам (4.10)-(4.11):

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + k^2(z)\varphi = \lambda \varphi, \lambda = \xi^2, 0 < z < H, \quad (4.24)$$

$$\varphi(0) = 0, \frac{d\varphi(H)}{dz} + \alpha \varphi(H) = 0. \quad (4.25)$$

Покажемо, що уявна частина власних значень спектральної задачі (4.24)-(4.25) додатна, якщо α - комплексне число з від'ємною уявною частиною ($\text{Im } \alpha > 0$). Для доведення розглянемо комплексно-спряжену до задачі (4.24)-(4.25) задачу Штурма-Ліувілля:

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dz^2} + k^2(z) \bar{\varphi} = \bar{\lambda} \bar{\varphi}, \bar{\lambda} = \bar{\xi}^2, 0 < z < H, \quad (4.26)$$

$$\bar{\varphi}(0) = 0, \frac{d\bar{\varphi}(H)}{dz} + \alpha \bar{\varphi}(H) = 0. \quad (4.27)$$

Нехай $\lambda_n = \text{Re } \lambda_n + i \text{Im } \lambda_n$ - будь-яке власне значення задачі (4.24)-(4.25), $\varphi_n(z)$ - відповідна йому власна функція. Тоді, інтегруючи частинами і використовуючи крайові умови (4.25), (4.27), отримаємо наступні тотожності:

$$\begin{aligned} \lambda_n(\varphi_n, \varphi_n) &= \lambda_n \|\varphi_n\|^2 = \\ &= \int_0^H \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dz^2} + k^2(z) \varphi_n \right) \bar{\varphi}_n dz = -(\alpha - \bar{\alpha}) |\varphi_n(H)|^2 + \int_0^H \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dz^2} + k^2(z) \right) \bar{\varphi}_n dz, \end{aligned}$$

$$\bar{\lambda}_n(\bar{\varphi}_n, \bar{\varphi}_n) = \bar{\lambda}_n \|\bar{\varphi}_n\|^2 = \int_0^H \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dz^2} + k^2(z) \bar{\varphi}_n \right) \bar{\varphi}_n dz.$$

Звідси випливає справедливість такої рівності

$$\text{Im}(\lambda_n) \|\varphi_n\|^2 = -\text{Im}(\alpha) |\varphi_n(H)|^2,$$

із якої зрозуміло, що уявна частина власних значень буде додатною тоді і тільки тоді, коли $\text{Im } \alpha < 0$.

Для того, щоб задовольнити умовам випромінювання, значення $\xi_n = \sqrt{\lambda_n}$

потрібно вибирати у відповідності з формулою (4.12).

1.6 Метод параболічного рівняння (параболічні наближення)

1.6.1 Основні ідеї методу

Методи параболічного рівняння засновані на геометричних конфігураціях, що виникають при розгляді хвиль у звуковому каналі. Під поширенням на великі відстані ми маємо на увазі поширення на відстань близько 30-35 морських миль (1 мор. миля = 1852 м), або 50-60 км. Оскільки глибина океану в середньому коливається в межах 4 - 5 км, то ми бачимо, що поширення по звуковому каналі відбувається головним чином у хвилеводі, досить тонкому по вертикалі, але досить витягнутому по горизонталі. Ця характерна конфігурація й уможливорює параболічне наближення.

Методи геометричної акустики засновані на припущенні, що довжини хвиль досить малі й дифракційні ефекти можна зневажити всюди, за винятком, можливо, декількох невеликих областей, а в методах поділу змінних (таких, як розкладання по нормальних модах) використане допущення, що океан строго горизонтально стратифікований.

Поширення на великі відстані відбувається обов'язково на низьких частотах, що звичайно не перевищують приблизно 500 Гц. Це пояснюється тим, що об'ємне поглинання акустичних хвиль у морській воді швидко зростає на частотах понад приблизно 1000 Гц, а спектр шуму океану часто має широкий мінімум у діапазоні від 10 до декількох сотень герців. Найбільший інтерес представляє частота близько 150 Гц. Відповідна довжина хвилі дорівнює приблизно 10 м, тобто вона дуже мала в порівнянні з товщиною звукового каналу (близько 2 км), так що буде поширюватися велика кількість мод.

Найбільший з кутів поширення променів, в основному визначаючих акустичне полі на великих відстанях, досить невеликий. Цей факт лежить в основі параболічного наближення.

Основну ідею безперервного наближення Френеля можна продемонструвати за допомогою виразу для функції Гріна у випадку однорідного океану:

$$p = \frac{1}{[r^2 + (z - z_s)^2]^{1/2}} e\{ik_o[r^2 + (z - z_s)^2]^{1/2}\}, \quad (5.1)$$

де z_s , - глибина джерела. Якщо кут з горизонталлю малий, тобто

$$\theta \cong |z - z_s| / r \ll 1,$$

то можна використати наближення

$$p \approx \psi(z, r) \frac{1}{\sqrt{r}} e^{ik_o r},$$

$$\psi(z, r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp[ik_o (z - z_s)^2 / 2r]. \quad (5.2)$$

Легко переконатися, що ψ задовольняє параболічному хвильовому рівнянню

$$i \frac{\delta \psi}{\delta r} + \frac{1}{2k_o} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.3)$$

Це найбільш простий приклад параболічного наближення.

Якщо позначити хвильове число як функцію частоти через $k(\omega)$, то інтегральне представлення хвильового пакету має вигляд

$$u(r, t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \exp\{i[k(\omega)r - \omega t]\} d\omega, \quad (5.4)$$

де $A(\omega)$ — частотний розподіл. Припускаючи, що воно має різкий пік в околі несучої частоти ω_0 (вузька смуга), можна провести розкладання $k(\omega)$:

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{dk}{d\omega_0} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \frac{d^2k}{d\omega_0^2},$$

зберігаючи члени аж до квадратичних (параболічне наближення).

Вираз (5.4) здобуває вид

$$u(r, t) \approx \psi(r, t) \exp\{i[k(\omega_0)r - \omega_0 t]\}, \quad (5.5)$$

де

$$\psi(r, t) = \int_0^{\infty} A(\omega_0 + \xi) \exp\left\{i\xi\left(\frac{dk}{d\omega_0} r - t\right) + \frac{i\xi^2}{2} \frac{d^2k}{d\omega_0^2}\right\} d\xi,$$

Безпосереднє диференціювання (5.5) показує, що огинаюча ψ задовольняє параболічному рівнянню

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{v} \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \quad (5.6)$$

де $v = d(\omega_0/dk)$, $\beta = -d^2k/d\omega_0^2 = v^{-3} dv/dk$. Тут v - групова швидкість, а β називається коефіцієнтом дисперсії.

Зараз важливо підкреслити, що параболічне наближення пов'язане не з асимптотичними границями $r \rightarrow \infty$ або $\omega_0 \rightarrow \infty$, як у наближеннях стаціонарної фази, а з границею $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$, де $\Delta\omega \sim 1/\tau_0$ — ширина смуги функції $A(\omega)$. Тому

такі вирази, як «наближення вузької смуги», «наближення повільно мінливої огибаючої» й «параболічне наближення», є синонімами.

Виведемо параболічне рівняння для акустичного поля за допомогою «наближення вузької смуги кутів». Щоб прояснити основні ідеї, розглянемо випадок стратифікованого океану. Добре відомо, що акустичний тиск, створюваний джерелом частоти ω , на відстанях $k_0 r \gg 1$ можна представити у вигляді суми нормальних мод :

$$p(z, r) = \sum_{m=1}^M A_m W_m(z) \frac{1}{(k_m r)^{1/2}} e^{i(k_m r - \omega t)} , \quad (5.7)$$

де W_m — власні функції «вертикального оператора»:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k_0^2 n^2(z) - k_m^2 \right] W_m = 0 , \quad (5.8)$$

$k_0 = \omega/c_0$, $n(z) = c_0/c(z)$; k_m — власні значення. Тут $n(z)$ — акустичний показник заломлення, $c(z)$ — швидкість звуку, c_0 — деяке її характерне значення. Оскільки в океані $n(z)$ ненабагато відрізняється від одиниці, зручно ввести величини:

$$v(z) = 1 - n^2(z) \quad (5.9)$$

Тепер (5.8) здобуває вид

$$\frac{d^2 W_m}{dz^2} + k_0^2 [\varepsilon_m - v(z)] W_m = 0 . \quad (5.10)$$

Припустимі значення ϵ_m лежать у вузькій смузі й вираз в правій частині (5.7) можна розкласти в ряд. Зберігаючи в експоненті тільки головний член і зневажаючи ϵ_m у коефіцієнтах, знаходимо

$$p(z, r) = \psi(z, r) \frac{1}{(k_0 r)^{1/2}} e^{i(k_0 r - \omega t)} \quad (5.11)$$

$$\psi(z, r) = \sum_{m=1}^M A_m W_{m(z)} e^{-i \frac{k_0}{2} \epsilon_m r} \quad (5.12)$$

Щоб одержати параболічне хвильове рівняння, ми, як й у попередньому випадку, продифференціюємо тепер (5.12) по r і використаємо (5.10), що дає

$$i \frac{\delta \psi}{\delta r} + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{k_0}{2} v(z) \psi = 0. \quad (5.13)$$

Це і є прототип рівняння параболічного наближення в підводній акустиці.

Далі, варто мати на увазі, що є багато параболічних наближень, асимптотично еквівалентних рівнянню (5.13), яке ми перепишемо у вигляді

$$i \frac{\delta \psi}{\delta r} + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{k_0}{2} [n^2(z) - 1] \psi = 0. \quad (5.14)$$

Оскільки (5.14) є хвильовим рівнянням, то наближення геометричної акустики можна одержати безпосередньо із цього рівняння.

З багатьох способів одержання з (5.14) відповідних променевих рівнянь ми виберемо запис огинаючої ψ полярних координатах через дісні амплітуду й фазу:

$$\psi(z, r) = A(z, r) e^{i\phi(z, r)}. \quad (5.15)$$

Підставляючи (5.15) в (5.14), прирівнюючи окремо дійсну й уявну частини до нуля й вважаючи

$$\theta(z, r) = \frac{1}{k_0} \frac{\delta \varphi}{\delta z}, \quad (5.16)$$

одержуємо пару рівнянь:

$$\frac{\partial A^2}{\partial r} + \frac{\partial(\theta A^2)}{\partial r} = 0, \quad (5.17 \text{ а})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial(\frac{1}{2} n^2(z))}{\partial z} + \frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial(\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2})}{\partial z}. \quad (5.17 \text{ б})$$

Ці співвідношення в точності еквівалентні (5.14), і останній член в (5.17 б) описує дифракційні ефекти. Рівняння геометричної акустики виходять при формальному граничному переході $k_0 \rightarrow \infty$, і тоді цей останній член зникає. У результаті рівняння (5.17 а) твердить, що акустична потужність A^2 переноситься уздовж характеристик

$$\frac{dz}{dr} = \theta \quad (5.18 \text{ а})$$

Звідси θ є кут (малий) з горизонталлю. Рівняння (1.18 б) здобуває вид

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} n^2(z) \right). \quad (5.18 \text{ б})$$

Комбінація цих двох рівнянь дає рівняння, що співпадає з (5.16), якщо

$$s \cong 1. \quad (5.19)$$

Щоб s було близько до одиниці, необхідно мати $n \cong 1$ і $\theta \ll 1$. Якщо акустична частота велика настільки, що використання променевих рівнянь виправдано, звідси виходить компактне формулювання умов застосовності параболічного наближення. Умова малості кута є необхідною.

Ми розглянули загалом найважливіші властивості підводного звукового каналу, які уможлиблюють поширення звуку на великі дистанції за горизонт океану. У випадку низькочастотного джерела на відстанях по горизонталі, що не перевищують кілька глибин океану, акустична енергія, що поширюється під кутами, більшими, ніж деякий граничний кут, губиться через взаємодію з поглинаючим дном. Залишаються тільки захоплені моди, що поширюються під малими кутами до горизонталі. Як було показано, природним наближенням, що відповідає цій характерній геометричній конфігурації, є наближення малих кутів (вузькополосне, параболічне). Розглядався в основному стратифікований океан, і було показано, що в цьому випадку (5.14) є фундаментальним рівнянням методу параболічного наближення. Далі виведемо деякі більш загальні параболічні хвильові рівняння, що дозволяють застосовувати даний метод до більш різноманітних ситуацій в океані.

1.6.2 Виведення параболічних рівнянь

Був розглянутий метод параболічного рівняння в надмірно ідеалізованому наближенні горизонтально-стратифікованого океану. Тепер ми глибше обґрунтуємо параболічне наближення, привівши кілька різних висновків й узагальнивши цей метод з урахуванням горизонтальних варіацій швидкості звуку, об'ємного поглинання, глибини океану, а також азимутальних ефектів

(океанічні фронти), залежності від часу й випадкових флуктуацій. Основна увага увесь час буде приділятися виведенню наближених модельних рівнянь.

Розглянемо спочатку точкове джерело, що випромінює єдину частоту в океан, показник заломлення якого залежить від трьох просторових координат, але не залежить від часу. Розглянемо ситуацію, при якій зміни швидкості звуку відбуваються настільки повільно, що за час поширення сигналу від джерела до приймача ними можна знехтувати. Тому час t є присутнім у показнику переломлення як параметр, але ця залежність не буде вказуватися явно.

Таке наближення застосовне, наприклад, до добових варіацій швидкості звуку. Крім того, спочатку ми будемо нехтувати змінами щільності рідини, а згодом урахуємо їх у моделі за допомогою ефективного показника переломлення. Буде використовуватися циліндрична система координат, зображена на мал. , де z — глибина, вимірювана від поверхні вниз, r - відстань по горизонталі й ϕ - азимутальний кут (пеленг), вимірюваний від довільно обраного напрямку.

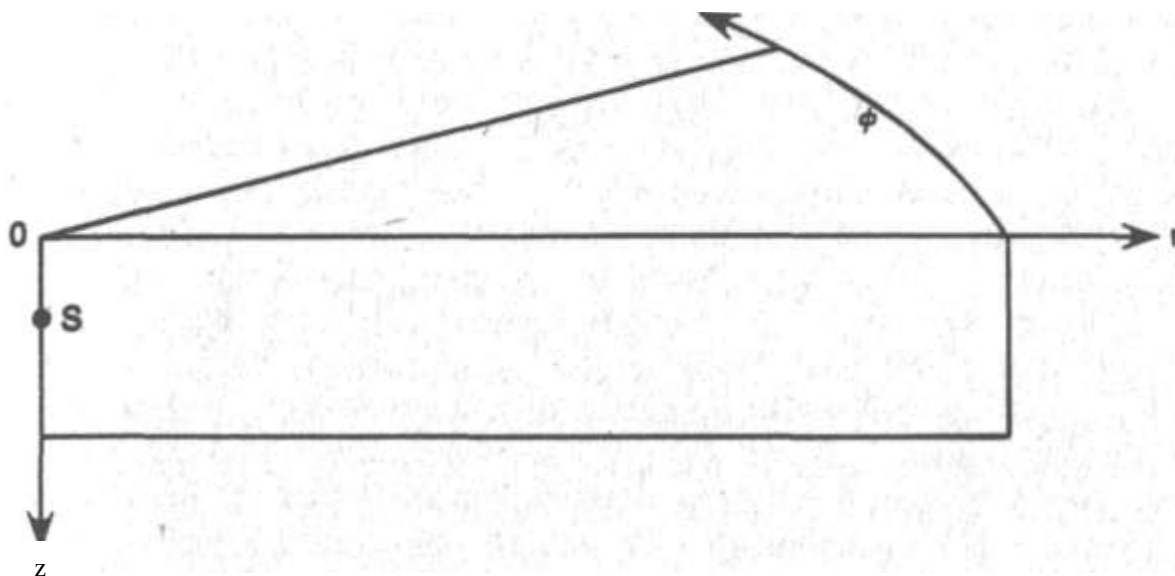


Рисунок 1.4 Визначення циліндричної системи координат.

Вихідним рівнянням у цьому випадку є рівняння Гельмгольца для акустичного тиску p :

$$\Delta p + k_0^2 [n^2(z, r, \phi) + i\nu(z, r, \phi)]p = -4\pi \cdot p_0 \delta(x) \quad (5.20 \text{ а})$$

$$\Delta p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} \quad (5.20 \text{ б})$$

$$\delta(x) = \delta(z - z_s) \frac{1}{2\pi r} \delta(r) \quad (5.20 \text{ в})$$

Тут $k_0 = \omega/c_0$, ω - кутова частота, $n(z, r, \phi) = c_0/c(z, r, \phi)$, c_0 - нормувальна швидкість звуку і $\nu(z, r, \phi)$ - коефіцієнт об'ємного поглинання. Сила джерела дорівнює p_0 (тиск на одиничній відстані), і він розташований при $r = 0$ на глибині z_s . Одне з основних завдань підводної акустики складається в рішенні цього рівняння для акустичного тиску $p(z, r, \phi)$ із заданими функціями n і ν і при врахуванні граничних умов на поверхні й дні.

Граничні умови на поверхні й дні не міняють параболічного наближення. Граничною умовою на поверхні є звичайна умова повернення до нуля тиску $p(\xi(r, \phi), r, \phi) = 0$, де $\xi(r, \phi)$ - зсув поверхні від середнього рівня $z = 0$.

Рівняння (5.20) еліптичне, і тому нам потрібно також задавати граничну умову на деякій вертикальній границі, що оточує джерело. У рамках параболічного наближення відсутня взаємодія між хвилями, що поширюються від джерела й до джерела, і тому необхідність у розгляді граничної умови на вертикальній поверхні не виникає. Хоча це й спрощує акустичну модель, однак приводить до додаткової помилки, який іноді було б бажано уникнути.

Перейдемо тепер до виведення з (5.20) параболічного хвильового рівняння. Як випливає з розділу 1.5.1, основна ідея полягає в тому, що в першому наближенні всі істотні на низьких частотах акустичні хвилі поширюються практично горизонтально від джерела. Отже, акустичне поле можна представити як функцію Ханкеля $H_0^{(1)}(k_0 r)$, промодульовану огибаючою, що повільно міняється із глибиною, відстанню й азимутом:

$$p(z, r, \phi) = \psi(z, r, \phi) H_0^{(1)}(k_0 r). \quad (5.21)$$

Можна очікувати, що така апроксимація виявиться гарною тільки в дальньому полі точкового джерела, де $k_0 r \gg 1$ і

$$H_0^{(1)}(k_0 r) = (2/i\pi \cdot k_0 r)^{1/2} e^{ik_0 r} \quad (5.22)$$

Підставляючи (5.21) в (5.20) і опускаючи член, що описує джерело, оскільки (5.21) не повинне виконуватися в безпосередній близькості від нього, ми без яких-небудь додаткових наближень одержуємо

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \left[\frac{2}{H_0^{(1)}} \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k_0^2 [n^2(z, r, \phi) - 1 + iv(z, r, \phi)] \psi = 0 \quad (5.23)$$

Введемо тепер наближення дальнього поля $k_0 r \gg 1$, і в силу (5.22)

$$\frac{2}{H_0^{(1)}} \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} = 2i k_0 [1 + O(\frac{1}{k_0^2 r^2})] \quad (5.24)$$

Зневажаючи членом порядку $(k_0 r)^{-2}$, одержуємо

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k_0^2 [n^2 - 1 + iv] \psi = 0. \quad (5.25)$$

Досить указати, що якщо залежність акустичного поля від \mathbf{r} має при деякому виборі \mathbf{k}_0 в основному вид $e^{ik_0 r}$, то на відстанях порядку довжини хвилі ψ як функція від r буде мінятися дуже повільно, тобто $\delta\psi/\delta r \ll k_0 \psi$, і відкидання $d^2\psi/dr^2$ виправдано. Знехтування в (5.25) цим членом приводить до основного рівняння методу параболічного рівняння в підводній акустиці:

$$2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k_0^2 [n^2(z, r, \phi) - 1 + iv(z, r, \phi)] \psi = 0. \quad (5.26)$$

Якщо поле визначене на деякій відстані \mathbf{r} , то (5.26) можна вирішувати як початкову задачу, «просуваючи» рішення далі по \mathbf{r} . Граничні умови по z були розглянуті раніше, а по змінній ϕ розв'язок повинен бути періодичним. Таким чином, ми маємо акустичну модель, у якій враховуються як варіації швидкості звуку й об'ємного поглинання по всім трьох вимірах, так і змінна глибина океану й підвищення вільної поверхні.

Інші спрощення (5.26) також мають значну практичну цінність. На великих відстанях від джерела кривизною циліндричних хвильових фронтів можна зневажити й замінити в (5.26) азимутальну координату на локальну декартову $dy = r d\phi$, що дає

$$2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_0^2 [n^2(z, y, r) - 1 + iv(z, y, r)] \psi = 0. \quad (5.27a)$$

Це рівняння особливо корисно при розрахунку вузьких пучків, що представляють інтерес у випадку рознесених у просторі приймачів, які виділяють лише вузьку смугу напрямків, або джерел, що дають спрямовану картину випромінювання.

Найбільш широко застосовуване в підводній акустиці параболічне хвильове рівняння виходить, якщо в (5.26) зневажити азимутальною похідною ψ . Це не означає, що передбачається циліндрична симетрія поля, але вказує на можливість знехтувати розсіюванням з одного азимутального напрямку в інший. У цьому випадку ми одержуємо

$$2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 [n^2(z, r) - 1 + iv(z, r)] \psi = 0. \quad (5.27b)$$

- де залежність n і v від ϕ не вказується, аналогічно тому як ми раніше опустили їхню явну залежність від часу.

Повернемося тепер до проблеми моделювання джерела, тобто одержання початкових даних для (5.27). Це можна зробити багатьма способами. Кращий з них полягає в тому, щоб вирішити повне еліптичне хвильове рівняння в малій області, що містить джерело, а потім відступити від нього на кілька довжин хвиль по \mathbf{r} в область, де справедливо параболічне рівняння. Якщо поблизу від джерела середовище можна вважати ідеально-стратифікованою, то розв'язок можна одержати за допомогою методу поділу змінних й обчислення нормальних мод (включаючи і безперервний спектр, що поблизу від джерела може бути істотним). Однак для багатьох програм така процедура є невиправдано складною і є достатнім набагато простіший спосіб. Пояснюється це тим, що важлива тільки та частина енергії, що попадає у звуковий канал і поширюється на великі відстані. Якщо джерело перебуває на відстані декількох довжин хвиль від будь-якої границі, то біля джерела, як відомо, поле буде розбіжною сферичною хвилею

$$\rho = \frac{P_0}{R} e^{ik_0 R} \quad (5.28)$$

де $R = [r^2 + (z - z_s)^2]^{1/2}$. Якщо припустити, що цей розв'язок вірний для таких відстаней \mathbf{r} , що

$$k_0^{-1} \ll r \ll B, \quad (2.29)$$

де B — товщина звукового каналу, то нам тим самим відомо поле на відстанях, де вже можна приміняти параболічне наближення, однак ніякі істотні

рефракційні ефекти ще не виникають. У цій області «перекриття» (2.27) має вигляд

$$2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.30)$$

і з (5.21) і (5.22) для тиску одержуємо

$$p(r, z) \approx \psi(z, r) \left(\frac{2}{i\pi k_0 r} \right)^{1/2} e^{ik_0 r} . \quad (5.31)$$

Порівнюючи (5.31) і (5.28) і роблячи наближення малих кутів $|z - z_s|/r \ll 1$ з точністю до величин другого порядку, ми бачимо, що в області, обумовленої (5.29), ψ повинне приблизно мати такий вигляд:

$$\psi(z, r) \approx p_0 (i\pi k_0 / 2r)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(z - z_s)^2}{r^2} \right] e^{ik_0 \frac{(z - z_s)^2}{2r}} \quad (5.32)$$

Цього можна досягти, задаючи при $r = 0$ таке розподілене джерело, що при $k_0 r \gg 1$ створював би поле виду (5.32). Найпростішим з таких джерел, що до того ж не дає помилкових бічних пелюстків, має вигляд

$$\psi(z, 0) = A e^{-\frac{(z - z_s)^2}{w^2}}, \quad (5.33a)$$

$$A = p_0 i \sqrt{\pi} / w \quad (5.33b)$$

$$w = \sqrt{2} / k_0 = \frac{\lambda_0}{\pi \sqrt{2}} \quad (5.33b)$$

Щоб продемонструвати це, розв'яжемо (5.30) з початковою умовою (5.33), що дає

$$\psi(z, r) = p_0 \left(\frac{i\pi k_0}{2r} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s^4} e^{-k_0^2 w^2 (z-z_s)^2 / 4r^2 s} * \exp\{i[k_0(z-z_s)^2 / 2rs + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctg(2r / k_0 w^2)]\} \quad (5.34)$$

і $s = 1 + k_0^2 w^4 / 4r^2$. Якщо $k_0 w = O(1)$, то в подальшому поле $k_0 r \gg 1$ ми будемо мати $s \cong 1$ і (5.34) набуває вид

$$\psi(z, r) = p_0 \left(\frac{i\pi k_0}{2r} \right)^{\frac{1}{2}} * e^{-k_0^2 w^2 (z-z_s)^2 / 4r^2 s} \exp[ik_0(z-z_s)^2 / 2r] \quad (5.35)$$

Порівнюючи цю рівність із (5.32), ми переконуємося в тому, що вони співпадають при $\mathbf{z} = \mathbf{z}_s$, фаза має правильний вигляд, і розподіл інтенсивності по глибині також буде правильним з точністю до величин другого порядку по куті, якщо W вибрати згідно (5.33в).

Згадуючи, що p_0 являє собою акустичний тиск точкового джерела на одиничній відстані, що ми позначимо r_0 , традиційний вираз для відносної інтенсивності можна записати у вигляді

$$TL = 10 \lg \left[\frac{|p(z, r)|^2}{(p_0 / r_0)^2} \right] = 10 \lg \left[\frac{2r_0^2}{\pi k_0 r p_0^2} |\psi(z, r)|^2 \right]. \quad (5.36)$$

Ці вирази, очевидно, не залежать від p_0 , і підстановка в них ближнього поля (5.32) показує, що при $r = r_0$ TL обернулося б у нуль, якби ця формула була справедлива для таких коротких відстаней. У США звичайно приймається $r_0 = 1$ ярд (0,9 м).

Метод параболічного рівняння цілком придатний для розгляду широкого класу джерел. Варто також помітити, що в практичних розрахунках, користуючись принципом взаємності, звичайно міняють місцями випромінювач і приймач. Таким чином, якщо, наприклад, джерело переміщається в просторі

стосовно фіксованого приймача і якщо властивості середовища залежать від відстані, то природно почати обчислення акустичних полів на приймачі й просуватися в просторі в напрямку до джерела. Це дозволяє не обчислювати поле для кожного наступного місця розташування джерела заново.

Метод параболічного рівняння принаймні так само добре придатний, як й інші моделі поширення низькочастотного звуку на великі відстані в глибокому океані, а іноді навіть винятково добре, особливо якщо середовище сильно міняється з відстанню, коли в інших методах виникають значні труднощі.

РОЗДІЛ 2 ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ В ГІДРОАКУСТИЦІ

2.1 Про активне гасіння звуку з обмеженою частотою у хвильоводах

Розглянено задачу про активне гасіння звуку з обмеженою частотою в хвильоводі. Якщо знехтувати згасаючими нормальними хвилями вищих порядків, то гасіння поля можна здійснити за допомогою кінцевої кількості приймачів і випромінювачів.

Щоб погасити довільне акустичне поле в хвильоводі, необхідно використовувати неперервно розподілені в зрізі випромінювачі і приймачі [9]. У тому разі, коли існує лише нульова нормальна хвиля, гасіння можна здійснити за допомогою дискретної системи випромінювачів і приймачів [10]. Розглянута нижче дискретна система дозволяє гасити акустичне поле тоді, коли може поширюватися скінченна кількість нормальних хвиль.

Розглянемо нескінченно протяжний хвильовід $W(-\infty < x < \infty)$ перерізом D з ідеальними (м'якими чи жорсткими) стінками, заповнений ідеальною середовищем. Звуковий тиск $p(R)$, $R=(x,y,z)$ задовольняє рівнянню Гельмгольца:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)p(R) = f(R), \quad R \in W, \quad (1.1)$$

одній з крайових умов

$$\frac{\partial p(R)}{\partial n} = 0, \quad R \in \partial W \quad (1.2a)$$

$$p(R) = 0, \quad R \in \partial W \quad (1.2b)$$

і умові можливості гасіння на нескінченності.

Нехай функція $f(R)$ фінітна. Нехай $f(R) \equiv 0$ при $x > -\varepsilon < 0$,
 $\omega^1 < \omega^2 < \dots < \omega^N < \dots$ - итичні частоти хвильоводу. Якщо $\omega^N < \omega < \omega^{N+1}$, то може
 бути представлена ось у такому вигляді:

$$p(R) = p^+(R) + \tilde{p}(R), \forall x > -\varepsilon \quad (1.3)$$

де $\tilde{p}(R)$ - сума неоднорідних хвиль експоненціально затухали зі збільшенням x .

$$p^+(R) = \sum_{j=1}^N A_j \varphi_j(r) e^{ik_j x}, r = (y, z) \quad (1.4)$$

Тут A_j - невідомі амплітуди, $\varphi_j(r)$ - відповідні функції поперечного
 перерізу D , нормовані умовою $\int_D |\varphi_j|^2 dr = 1, k_j = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - (\frac{\omega^j}{\omega})^2}$,
 повздовжня компонента хвильового вектора j -ої нормальної хвилі. Якщо власне
 значення вироджене, то в суму (1.4) входять всі відповідні власні функції, що
 утворюють ортонормований базис власного підпростору.

Розмістимо в перетині $D_0(x=0)$ хвильоводу N_1 точкових монопольних і N_2
 дипольних випромінювачів з амплітудами a_j, b_j відповідно; осі диполей
 орієнтуємо перпендикулярно до D_0 . Нехай $\{r_j^a\}, \{r_j^b\}$ координати монополей і
 диполей відповідно. Ці випромінювачі створюють поле

$$p_0(R) = p_s^0(R) + \tilde{p}_s(R), \quad \forall x, \quad (1.5)$$

де $p_s^0(R), \tilde{p}_s$ - суми однорідних і неоднорідних хвиль.

Розглянемо таку задачу: знайти такі амплітуди a_j, b_j щоб

$$p_s^0(R) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -p^+, & x > 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Потрібно з'ясувати також, при яких мінімальних значеннях N_1 і N_2 і при яке розташування випромінювачів цю задачу можна розв'язати.

Поле монопольного випромінювача, розміщеного на D_0 в точці $r = r_i^a$ має вид

$$G(R, R_i^a) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2ik_j} \varphi_j(r) \varphi_j(r_i^a) e^{ik_j|x|} + \tilde{G} , \quad (1.7)$$

де \tilde{G} - сума неоднорідних хвиль. Аналогічно поле дипольного випромінювача має вид

$$G(R, R_i^b) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \varphi_j(r) \varphi_j(r_i^b) e^{ik_j|x|} \operatorname{sgn}(-x) + \tilde{G}^i . \quad (1.8)$$

Для поля $p_s^0(R)$ отримуємо такий вираз:

$$p_s^0(R) = \sum_{i=1}^{N_1} a_i G(R, R_i^a) + \sum_{i=1}^{N_2} b_i G(R, R_i^b) = \sum_{j=1}^N D_j \varphi_j(r) e^{ik_j|x|} ,$$

$$D_j = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{a_i \varphi_j(r_i^a)}{2ik_j} + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{b_i \varphi_j(r_i^b)}{2} \operatorname{sgn}(-x) . \quad (1.9)$$

Подставляя в формулу (1.6) висловлювання для p_s^0 і p^+ , отримуємо систему з $2N$ лінійних рівнянь з $N_1 + N_2$ невідомими a_j, b_j

$$a_1 \frac{\varphi_1(r_1^a)}{2ik_1} + \dots + a_{N_1} \frac{\varphi_1(r_{N_1}^a)}{2ik_1} + b_1 \frac{\varphi_1(r_1^b)}{2} + \dots + b_{N_2} \frac{\varphi_1(r_{N_2}^b)}{2} = 0,$$

$$a_1 \frac{\varphi_N(r_1^a)}{2ik_N} + \dots + a_{N_1} \frac{\varphi_N(r_{N_1}^a)}{2ik_N} + b_1 \frac{\varphi_N(r_1^b)}{2} + \dots + b_{N_2} \frac{\varphi_N(r_{N_2}^b)}{2} = 0,$$

$$a_1 \frac{\varphi_1(r_i^a)}{2ik_1} + \dots + a_{N_1} \frac{\varphi_1(r_{N_1}^a)}{2ik_1} - b_1 \frac{\varphi_1(r_1^b)}{2} - \dots - b_{N_2} \frac{\varphi_1(r_{N_2}^b)}{2} = -A_i,$$

.....

$$a_1 \frac{\varphi_N(r_1^a)}{2ik_N} + \dots + a_{N_1} \frac{\varphi_N(r_{N_1}^a)}{2ik_N} - b_1 \frac{\varphi_N(r_1^b)}{2} - \dots - b_{N_2} \frac{\varphi_N(r_{N_2}^b)}{2} = -A_N, \quad (1.10)$$

Очевидно, що мінімальне кількість випромінювачів дорівнює $2N = N_1 + N_2$. Далі будемо припускати кількість випромінювачів саме таким.

Рішення системи (1.10) виглядає так:

$$a_j = \frac{\Delta_{aj}}{\Delta_s}, \quad b_j = \frac{\Delta_{bj}}{\Delta_s}, \quad (1.11)$$

де Δ_s - визначник системи (1.10). Δ_{aj}, Δ_{bj} , - визначники, отримані з Δ_s заміною відповідного стовпчика на стовпчик правої частини. Перетворюємо визначник Δ_s . Замість l рядків ($l = 1, 2, \dots, N$) напишемо суму l і $N+l$ рядків, а замість $N+l$ рядків – різницю l і $N+l$ рядків. Тепер неважко бачити, що $\Delta_s \equiv 0$, якщо $N_1 \neq N_2$. Отже, мінімальне кількість джерел $N_1 = N_2 = N$. У протилежному разі система (1.10) може бути нерозв'язною. Нехай $N_1 = N_2 = N$, тоді

$$\Delta_s = (-i)^N (k_1 k_2 \dots k_N)^{-1} \begin{vmatrix} \varphi_1(r_1^a) \dots & \dots \varphi_1(r_N^a) \\ \varphi_N(r_1^a) \dots & \dots \varphi_N(r_N^a) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varphi_1(r_1^b) \dots & \dots \varphi_1(r_N^b) \\ \varphi_N(r_1^b) \dots & \dots \varphi_N(r_N^b) \end{vmatrix} = \quad (1.12)$$

$$= (-i)^N (k_1 k_2 \dots k_N)^{-1} \Delta_{sm} \Delta_{sd}$$

Умова $\Delta_s \neq 0$ є обмеженням на розташування випромінювачів. Цікаво, що визначники Δ_{sm}, Δ_{sd} мають ту саму структуру, що й хвильова функція системи квантовомеханічних часток, що задовольняють статистиці Ферми-Дірака[11].

Перейдемо до вирішення завдання прийому. Нехай $f(\bar{R}) = f_1(\bar{R}) + f_2(\bar{R})$, де $f_1(\bar{R}) \equiv 0$ при $x > -\varepsilon < 0$, $f_2(\bar{R}) \equiv 0$ при $x < \varepsilon$.

Тоді поле $p(\bar{R})$ має вид

$$p(\bar{R}) = p^+(\bar{R}) + p^-(\bar{R}) + \tilde{p} \quad |x| < \varepsilon \quad (1.13)$$

де p^+ і p^- - однорідні хвилі, що біжать вправо й вліво відповідно, \tilde{p} - сума неоднорідних хвиль. При цьому

$$p^+ = \sum_{j=1}^N A_j \varphi_j(r) e^{ik_j x} \quad (1.14)$$

$$|x| < \varepsilon$$

$$p^- = \sum_{j=1}^N B_j \varphi_j(r) e^{-ik_j x}.$$

У розрізі хвилеводу $D_{-\delta}$ ($x = -\delta, 0 < \delta < \varepsilon$) розташуємо N монопольні і N дипольних приймачів в точках r_j^m, r_k^d відповідно. Приймачі пропонуються акустично прозорими. Потрібно обчислити A_j по вимірним приймачами значенням поля, тобто знайти амплітуди хвиль, що розповсюджуються зліва направо, інакше кажучи, потрібно вирішити завдання про однонаправлений прийом. З зроблених припущень A_j є рішення наступної системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N A_j \varphi_j(r_l^m) e^{-ik_j \delta} + \sum_{j=1}^N B_j \varphi_j(r_l^m) e^{ik_j \delta} = m_l \\ \sum_{j=1}^N A_j i k_j \varphi_j(r_l^d) e^{-ik_j \delta} + \sum_{j=1}^N B_j i k_j \varphi_j(r_l^d) e^{ik_j \delta} = d_l \\ l = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (1.15)$$

де m_i, m_d - свідчення приймачів. Розв'язок системи дається формулою

$$A_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_r} e^{ik_j \delta}, \quad (1.16)$$

де Δ_r - визначник системи (1.15), Δ_j отримується з Δ_r заміною відповідно стовпчика на стовпчик з правих частин. Перетворюючи визначник Δ_r отримаємо

$$\Delta_r = (-i)^N 2^{2N} (k_1 k_2 \dots k_N) \det \|\varphi_i(r_j^m)\| \times \det \|\varphi_i(r_k^d)\|. \quad (1.17)$$

Якщо приймачі розміщені так, що $\Delta_r \neq 0$, то формула (1.16) дає рішення аналізованої завдання.

Підкреслимо, що при розв'язанні цієї завдання ми використовували лише таку інформацію: 1) значення ω, c ; 2) геометрію хвилеводу; 3) звернення нуль функцій f_1, f_2 при $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Ніякий інший інформації про джерела f , як у випадку неперервного розподілу приймачів [9], не було використано. Так само, як і вище, можна показати, що кількість приймачів є мінімальним та що кількість монопольних приймачів має дорівнює числа дипольних приймачів.

Нехай тепер у хвилеводі є два джерела f_1, f_2 про які відомо, що $f_1(\bar{R}) \equiv 0$ при $x > -\varepsilon$, $f_2(\bar{R}) \equiv 0$ при $x < \varepsilon$. Потрібно погасити з точністю до неоднорідних хвиль, поле p_1 , створене випромінювачем f_1 в області $x > 0$.

З викладеного вище слідує, що на $D_0(x=0)$ можна розташувати випромінювачі, поле яких гасить p_1 з необхідної точністю, але для цього попередньо потрібно знайти невідомі амплітуди в розкладанні p_1 за нормальними хвилями. Для цього в перерізі $D_{-\delta}(0 < \delta < \varepsilon)$ розташуємо приймачі, описаних щойно способом. Якщо числа δ і $\varepsilon - \delta$ досить великі, тобто відстань між приймачами і випромінювачами порядку кількох довжин хвиль, вимірюване

приймачами, буде мала і амплітуди поширених хвиль можна розрахувати з достатньої точністю.

Визначимо тепер обмеження на розташування приймачів і випромінювачів.

Розглянемо плоский хвильовід $W = \{-\infty < x < \infty\} \{0 \leq y \leq h\}$ з ідеально жорсткими стінками. Власні функції поперечного перерізу мають вид

$$\varphi_1(y) = \frac{1}{\sqrt{h}}; \quad \varphi_j(y) = \sqrt{\frac{2}{h}} \cos(j-1) \frac{\pi \cdot y}{h}, \quad j = 2, 3, \dots, N.$$

З'ясуємо, які обмеження накладаються в такому хвильоводі на розташування приймачів і випромінювачів, необхідних для завдання гасіння. Для цього досить досліджувати визначник Δ_{sm} , який пропорційний визначнику

$$\Delta = \det \left\| \cos(j-1) \frac{\pi \cdot y_l}{h} \right\|, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Кожен елемент j -ого рядка $\cos(j-1) \frac{\pi \cdot y_l}{h}$ можна уявити в вигляді

$$\cos(j-1) \frac{\pi \cdot y_l}{h} = 2^{j-2} \left(\cos \frac{\pi \cdot y_l}{h} \right)^{j-1} + \sum_k C_k \left(\cos \frac{\pi \cdot y_l}{h} \right)^{j-1-2k},$$

де C_k - постійні коефіцієнти, такі, що при $j-1-2k < 0$. Кожен член суми можна уявити в вигляді лінійної комбінації з відповідних елементів попередніх рядків, тому

$$\det \left\| \cos(j-1) \frac{\pi \cdot y_l}{h} \right\| = 2^{\sum_{j=1}^N (j-2)} \det \left\| \cos^{(j-1)} \frac{\pi \cdot y_l}{h} \right\| = 2^{\sum_{j=1}^N (j-2)} \tilde{\Delta},$$

де $\tilde{\Delta}$ - визначник Вандермонда

$$\tilde{\Delta} = \prod_{p>q} \left(\cos \frac{\pi \cdot y_p}{h} - \cos \frac{\pi \cdot y_q}{h} \right) = \prod_{p>q} 2 \sin \frac{\pi}{2h} (y_p + y_q) \sin \frac{\pi}{2h} (y_p - y_q)$$

З цієї рівності ясно, що визначник може перетворюватись на нуль тільки в тому випадку, коли $y_p = y_q$, тобто якісь два однотипних елемента розташовані в одній точці. Таким чином, в данному випадку існує тільки одне обмеження на розташування випромінювачів: не можна в одній точці розміщувати однотипні випромінювачі. Аналогічне обмеження діє і для приймачів.

В наступних прикладах розглядаються просторові хвилеводи зі сталою швидкістю звуку. Обмеження на розташування випромінювачів (відповідно приймачів) є в тому, що їх не можна ставити на дініях, на яких $\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(r) \equiv 0$, де c_1, \dots, c_N - деякі константи. Але цей критерій малоефективний. Нижче приведені більш ефективні критерії для конкретних прикладів.

1. Хвилевід з ідеально м'якими стінками, $N=1$. В цьому випадку визначник Δ_{sm} буде пропорційним першій власній функції $\varphi_1(x, y)$, і обмеження є в тому, що випромінювачі (приймачі) не можна розташовувати у вузлах цієї власної функції. При $N=2$ умова $\Delta_s \neq 0$ зводиться до умови

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(r^1) & \varphi_1(r^2) \\ \varphi_2(r^1) & \varphi_2(r^2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Випромінювачі (приймачі) не можна розташовувати на лінії рівня функції $\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_2(r)}$

(тобто лінії $\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_2(r)} = \text{const}$).

2. Хвилевід з ідеально твердими стінками, $N=2$. В цьому випадку визначник Δ_{sm} пропорційний визначнику

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varphi_2(r^1) & \varphi_2(r^2) \end{vmatrix} = \varphi_2(r^2) - \varphi_2(r^1).$$

Випромінювачі (приймачі) в цьому випадку неможна розташовувати на лінії рівня $\varphi_2(\kappa) = \text{const}$ другої власної функції.

3. Хвилевід з ідеально твердими стінками, що має форму кругового циліндра радіуса a . Власні функції поперечного перерізу хвилеводу мають вигляд

$$\varphi_0 \equiv \text{const},$$

$$\varphi_{mn} = C_{mn} I_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a} r\right) e^{im\theta},$$

де (r, θ) - полярні координати поперечного перерізу, μ_{mn} - пронумеровані в порядку зростання нулі функції $I_m'(r)$, C_{mn} - нормувальні константи. При $\mu_{11} < \frac{\omega}{c} < \mu_{21}$ є три таких хвилі, бо власне значення μ_{11} , як і всі власні значення $\mu_{mn} (m \neq 0)$, двічі вироджене. Умова обмеження $A_{nm} \neq 0$ еквівалентна трансцендентному рівнянню

$$A_1 A_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + A_2 A_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) + A_3 A_1 \sin(\theta_3 - \theta_1) = 0.$$

Тут $A_j = I\left(\frac{\mu_{11} r_j}{a}\right)$ і (r_j, θ_j) - координати точок, в яких розміщені випромінювачі (приймачі).

2.2 Оптимальне амплітудно-фазове керування звуковими полями

Розглянемо найпростішу задачу керування звуковим полем в плоскопаралельному хвилеводі.

В циліндричній системі координат (r, z, φ) в області $\bar{G} = G \cup \Gamma = \{0 < r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \Phi, 0 \leq z \leq H\}$ розглянемо крайову задачу для рівняння Гельмгольца:

$$\Delta \Phi + k^2(z)\Phi = -Bu \quad (2.1)$$

з граничними умовами

$$\Phi|_{z=0} = 0, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \alpha \Phi \right) \Big|_{z=H} = 0 \quad (2.2)$$

де $k(z) = \omega/c(z)$, $c(z)$ – швидкість звука у воді, $\text{Im } k(z) > 0$, Bu – керування, B – задана функція, $\Phi(r, \varphi, z)$ – звуковий тиск.

Розглянемо задачу визначення такої комплексної функції керування $u(r, \varphi, z)$, яка створює в області $\Omega \subset \bar{G}$ звуковий тиск $\Phi(r, \varphi, z)$, близький до заданого $\Phi_0(r, \varphi, z)$ в певній метриці. Зрозуміло, що енергія випромінювання $u(r, \varphi, z)$ повинна бути мінімальною. Введемо наступні позначення: $x = (\varphi, z)$.

Сформулюємо наступні критерії оптимальності:

$$I_1(u) = \int_{\Omega_1} \beta(x) |\Phi(R, x) - \Phi_0(R, x)|^2 ds_1 + \int_{\Omega} \gamma(x) |u(x)|^2 ds \quad (2.3)$$

$$I_2(u) = \int_{\Omega_1} \beta(x) (|\Phi(R, x)| - |\Phi_0(R, x)|)^2 ds_1 + \int_{\Omega} \gamma(x) |u(x)|^2 ds \quad (2.4)$$

$$I_3(u) = \int_{\Omega_1} \beta(x) \left(|\Phi(R, x)|^2 - I_0(x) \right)^2 ds_1 + \int_{\Omega} \gamma(x) |u(x)|^2 ds \quad (2.5)$$

де $\Omega_1 = \{r = R > 0, x = (\varphi, z) \in S_1\}$, $\Omega = \{r = R_0 < R, \mathbb{S} = (\varphi, z)\}$, $\beta(x), \gamma(x)$ - задані невід'ємні дійснозначні вагові функції. Крім того, комплекснозначна функція керування $u(r, \varphi, z)$ належить деякій заданій замкнутій, обмеженій множині функцій U .

Задача амплітудно-фазового керування для кожного критерію $I_i(u)$, $i = 1, 2, 3$. Потрібно знайти таке керування $u(r, \varphi, z) \in U$, яке мінімізує задані критерії якості $I_i(u)$, $i = 1, 2, 3$.

Знайдемо необхідні умови екстремума для функціонала $I_1(u)$. Для цього знайдемо головну лінійну частину приросту

$$\Delta I_1(u) = I_1(u^0 + \delta u) - I_1(u^0),$$

де δu - приріст керування. Відповідний приріст розв'язку позначимо через $\delta \Phi(r, x) = \Phi(r, x, u^0 + \delta u) - \Phi(r, x, u^0)$. Очевидно, що функція $\delta \Phi(r, x)$ задовільняє такій крайовій задачі

$$\Delta \delta \Phi + k^2(z) \delta \Phi = -B \delta u \quad (2.6)$$

$$\delta \Phi|_{z=0} = 0, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \alpha \Phi \right) \Big|_{z=H} = 0 \quad (2.7)$$

Обчислюючи приріст функціонала $I_1(u)$, знайдемо

$$\Delta I_1(u) = \int_{\Omega_1} \beta(x) \left(\left| \Phi(u^0 + \delta u) - \Phi_0 \right|^2 - \left| \Phi_0(u^0) - \Phi_0 \right|^2 \right) ds_1 + \int_{\Omega} \gamma(x) \left(\left| u^0 + \delta u \right|^2 - \left| u^0 \right|^2 \right) ds, \quad (2.8)$$

де позначено $\Phi(u^0 + \delta u) = \Phi(R, x, u^0 + \delta u)$. Введемо позначення

$$\begin{aligned} u &= u_I + iu_2, \quad v = v_I + iv_2; \\ \langle u, v \rangle &= \operatorname{Re}(u, v)_{L_2(\Omega)} = (u_I, v_I) + (u_2, v_2), \quad \text{де} \\ (u, v)_{L_2(\Omega)} &= \int_{\Omega} u \cdot \bar{v} d\Omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

тоді легко безпосередньо перевірити, що

$$\begin{aligned} \left| u^0 + \delta u \right|^2 - \left| u^0 \right|^2 &= \left| \delta u \right|^2 + 2 \operatorname{Re}(\delta u \cdot \bar{u}), \\ \left| \Phi(u^0 + \delta u) - \Phi_0 \right|^2 - \left| \Phi(u^0) - \Phi_0 \right|^2 &= \left| \Phi(u^0 + \delta u) - \Phi(u^0) + \Phi(u^0) - \Phi_0 \right|^2 - \left| \Phi(u^0) - \Phi_0 \right|^2 = \\ &= \left| \delta \Phi \right|^2 + 2 \operatorname{Re}(\delta \Phi \cdot \overline{(\Phi(u^0) - \Phi_0)}). \end{aligned}$$

Таким чином можемо записати, що

$$\Delta I_1(u) = 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega_1} \beta(x) \delta \Phi \cdot \overline{(\Phi(u^0) - \Phi_0)} ds_1 + 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \gamma(x) \delta u \cdot \bar{u} ds + \int_{\Omega_1} \beta(x) \left| \delta \Phi \right|^2 ds_1 + \int_{\Omega} \gamma(x) \left| \delta u \right|^2 ds \quad (2.10)$$

Враховуючи результат, розв'язок задачі запишемо в виді

$$\Phi(r, \varphi, z) = \int_{\Omega_1} B u(r, x) \cdot G(r, x; r_0, x_0) ds_1 \quad (2.11)$$

де $G(r, x; r_0, x_0)$ - функція Гріна крайової задачі

$$\Delta \Phi + k^2(z) \Phi = - \frac{\delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0)}{2\pi r} \quad (2.12)$$

$$\Phi|_{z=0} = 0, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \alpha \Phi \right) \Big|_{z=H} = 0, \quad (2.13)$$

Ω_1 - область зміни функції Bu .

Враховуючи це зауваження можемо записати

$$\int_{\Omega} \beta(x) |\delta \Phi|^2 d\Omega = \int_{\Omega} \beta(x) \left(\int_{\Omega_1} B \delta u \cdot G(r, x, r_0, x_0) ds_1 \right)^2 ds \leq M \cdot \|\delta u\|_{L_2(\Omega_1)}^2 ;$$

$$M = \int_{\Omega} \beta(x) \left(\int_{\Omega_1 \Omega_1} B^* G(r, x; r_1, x_1) \cdot G(r_1, x_1; r_0, x_0) ds_1 ds_1 \right) ds \quad (2.14)$$

Враховуючи це, одержимо

$$\Delta I_1(u^0) = 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega_1} \beta(x) \delta \Phi \cdot \overline{(\Phi(u^0) - \Phi_0)} ds_1 + 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \gamma(x) \delta u \cdot \bar{u} ds + o(\|\delta u\|_{L_2(\Omega)}) \quad (2.15)$$

Введемо спряжену задачу для функції $\psi(r, x)$

$$\Delta \bar{\psi} + \bar{k}^2(z) \bar{\psi} = -2\beta(z) \overline{(\Phi(u^0) - \Phi_0)} \quad (2.16)$$

$$\psi|_{z=0} = 0, \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \alpha \psi \right) \Big|_{z=H} = 0 \quad (2.17)$$

і перетворимо приріст функціоналу $\Delta I_1(u^0)$

$$\begin{aligned}
\Delta I_1(u^0) &= -\operatorname{Re} \int_{\Omega_1} \delta \Phi \cdot \bar{\psi} ds_1 + 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \gamma(x) \delta u \cdot \bar{u}^0 ds + o(\|\delta u\|_{L_2(\Omega)}) = \\
&= -\operatorname{Re} \int_{\Omega_1} B \delta u \cdot \bar{\psi} ds_1 + 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \gamma(x) \delta u \cdot \bar{u}^0 ds + o(\|\delta u\|_{L_2(\Omega)}) = (I_1'(u), \delta u) + o(\|\delta u\|_{L_2(\Omega)})
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\text{Отже } \operatorname{grad} I_1(u) = (-B^* \psi_1 + 2\gamma_1, -B^* \psi_2 + 2\gamma_2). \tag{2.19}$$

Повернемось до повного приросту (2.10):

$$\Delta I_1(u^0) = -\operatorname{Re} \int_{\Omega_1} B \delta u \cdot \bar{\psi} ds_1 + 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \gamma(x) \delta u \cdot \bar{u}^0 ds + \int_{\Omega} \gamma(x) |\delta u|^2 d\Omega + \int_{\Omega_1} \beta(x) |\delta \Phi|^2 ds_1 \tag{2.20}$$

Якщо ввести функцію

$$H = \operatorname{Re}(Bu \cdot \psi - \gamma |u|^2), \tag{2.21}$$

тоді

$$\Delta I_1(u^0) = -\operatorname{Re} \int_{\Omega_1} B \delta u \cdot \overline{(\psi^0 - 2\gamma u^0)} ds_1 + \int_{\Omega} \gamma |\delta u|^2 d\Omega + \int_{\Omega_1} \beta(x) |\delta \Phi|^2 ds_1 \tag{2.22}$$

Звідси випливає, що достатніми умовами оптимальності є умова

$$-\operatorname{Re} \int_{\Omega_1} \delta u \overline{(\psi^0 - 2\gamma u^0)} ds_1 \leq 0, \tag{2.23}$$

яка в силу (2.21) може бути записана так: для всіх допустимих керувань

$$\int_{\Omega} [H(\psi^0, u^0, \Phi^0) - H(\psi^0, u, \Phi^0)] ds \leq 0 \tag{2.24}$$

Остання нерівність еквівалентна такій

$$H(\psi^0, u^0, \Phi^0) = \max_{u \in U} H(\psi^0, u, \Phi^0) \tag{2.25}$$

де символ $(=)$ означає рівність майже скрізь в області Ω .

Розглянемо тепер $I_2(u)$ і знайдемо приріст його першого доданку, оскільки приріст другого обчислюється тим же чином:

$$\Delta I_2(u^0) = \int_{\Omega_1} \beta(x) \left\{ \left(|\Phi(u^0 + \delta u)| - |\Phi_0| \right)^2 - \left(|\Phi(u^0)| - |\Phi_0| \right)^2 \right\} \quad (2.26)$$

Зробимо наступні стандартні перетворення

$$\begin{aligned} |\Phi(u^0 + \delta u)| &= |\Phi(u^0 + \delta u) - \Phi(u^0) + \Phi(u^0)| = |\delta\Phi(u^0) + \Phi(u^0)| = \left\{ (\delta\Phi(u^0) + \Phi(u^0)) \overline{(\delta\Phi(u^0) + \Phi(u^0))} \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ |\delta\Phi(u^0)|^2 + |\Phi(u^0)|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{\Phi(u^0)} \cdot \delta\Phi(u^0)) \right\}^{1/2} = |\Phi(u^0)| \cdot \left\{ 1 + \frac{|\delta\Phi(u^0)|^2}{|\Phi(u^0)|^2} + \frac{2\operatorname{Re}(\overline{\Phi(u^0)} \delta\Phi(u^0))}{|\Phi(u^0)|^2} \right\}^{1/2} = \\ &= |\Phi(u^0)| \cdot \left\{ 1 + \frac{\operatorname{Re}(\overline{\Phi(u^0)} \delta\Phi(u^0))}{|\Phi(u^0)|^2} + \frac{|\delta\Phi(u^0)|^2}{|\Phi(u^0)|^2} + K \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

В силу співвідношення $\frac{\overline{\Phi(u^0)}}{|\Phi(u^0)|} = e^{-i \arg \Phi(u^0)}$ із (2.27) одержимо:

$$|\Phi(u^0 + \delta u)| = |\Phi(u^0)| + \operatorname{Re}(\delta\Phi(u^0) \cdot e^{-i \arg \Phi(u^0)}) + o(|\delta\Phi(u^0)|).$$

Отже

$$\begin{aligned} \Delta I_2 &= 2 \int_{\Omega_1} \operatorname{Re}(\delta\Phi \cdot \beta(x) (|\Phi(u^0)| - |\Phi_0|) \cdot e^{-i \arg \Phi(u^0)}) ds_1 + 2 \int_{\Omega_1} \beta(x) \frac{|\delta\Phi(u^0)|^2}{|\Phi(u^0)|^2} ds_1 + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \gamma(x) \delta u \cdot \overline{u^0} ds + o(\|\delta u\|_{L_2(\Omega)}^4) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Введемо таку крайову задачу для функції $\bar{\psi}(r, x)$:

$$\Delta \bar{\psi} + \bar{k}^2 \cdot \bar{\psi} = -2\beta(x) \cdot (|\Phi(u^0)| - |\Phi_0|) \cdot e^{-i \cdot \arg \Phi(u^0)} \quad (2.29)$$

$$\bar{\psi}|_{z=0} = 0, \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} + \alpha \bar{\psi} \right) \Big|_{z=H} = 0 \quad (2.30)$$

Враховуючи (2.29)-(2.30), приріст (2.28) перепишемо у вигляді:

$$\Delta I_2 = \operatorname{Re} \int_{\Omega} (-\delta u \cdot \bar{\psi}) ds + 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega_1} \gamma(x) \delta u \cdot \bar{u}^0 ds_1 + 2 \int_{\Omega_1} \beta(x) \frac{|\delta \Phi(u^0)|^2}{|\Phi(u^0)|^2} ds + o(\|\delta u\|_{L_2(\Omega)}^4)$$

$$I'(u^0) = \left(-\psi_1|_{r=R} + 2\mu_1|_{r=R_0}; -\psi_2|_R + 2\mu_2|_R \right)$$

$$\Delta I_3 = -4 \int_{\Omega} \beta (|\Phi(u^0)|^2 - I_0) \operatorname{Re}(\delta \Phi \cdot \bar{\Phi}) ds + o(\|\delta u\|_{L_2})$$

$$\Delta \bar{\psi} + \bar{k}^2 \cdot \bar{\psi} = -4\beta(x) (|\Phi(u^0)|^2 - I_0) \cdot \bar{\psi}(u^0)|_R$$

Зауваження. При відсутності обмежень задача набуває вигляду:

Потрібно знайти таку функцію $|u|$, щоб мінімізувати критерій якості

$$I_1(u) = (p(\mathcal{F}) - p_3(\mathcal{F}), p(\mathcal{F}) - p_3(\mathcal{F}))_{L_2, \gamma_0(V_0)} + (u(\mathcal{F}), u(\mathcal{F}))_{L_2, \gamma_0(V_0)},$$

де для (\bullet, \bullet) прийнято позначення $(u, v)_{L_2, \gamma_1(V_0)} = \int_{V_0} \gamma_1 u \bar{v} dV_0$.

Для керувань $u_1(\eta_0)$ і $u_2(z)$ другий доданок в функціоналі () має вид

$$(u_1(\eta_0), u_1(\eta_0))_{L_2, \gamma_1(S_0)} \text{ та } (u_2(z), u_2(z))_{L_2, \gamma_1(z_1, z_2)}$$

відповідно, $\mathcal{P} = (r, z, \varphi) \in V_0$ $\mathcal{H} = (\xi, \eta) \in S$, $z \in [z_1, z_2]$.

Для всіх трьох видів керувань рівняння Ейлера для функціоналу $I_1(u)$ при $p_3 \equiv 0$ мають вид

$$\operatorname{Re} \left[\left\{ \int_{\Omega} G^*(\mathcal{P}', \mathcal{P}) \gamma_0(\mathcal{P}') \int_{V_0} G(\mathcal{P}', \mathcal{P}'') u(\mathcal{P}'') dV_{\mathcal{P}''} dV_{\mathcal{P}} + \gamma_1(\mathcal{P}) u(\mathcal{P}) \right\} e^{-i \arg u(\mathcal{P})} \right] = 0$$

$$\mathcal{P} = (r, z, \varphi)$$

$$\operatorname{Re} \left[\left\{ \int_{\Omega} G^*(\mathcal{K}', \mathcal{K}_0) \gamma_0(\mathcal{K}') \int_{S_0} G(\mathcal{K}', \mathcal{K}'_0) u_1(\mathcal{K}'_0) dS_0 dS' + \gamma_1(\mathcal{K}_0) u_1(\mathcal{K}_0) \right\} e^{-i \arg u(\mathcal{K}_0)} \right] = 0$$

$$\mathcal{K}_0 = (\mathcal{H}, 0), \quad \mathcal{H} = (\xi, \eta) \in S_0, \quad \mathcal{K} = (x, y, z).$$

$$\operatorname{Re} \left[\left\{ \int_{\Omega} G^*(\mathcal{P}', \mathcal{P}_0) \gamma_0(\mathcal{P}') \int_{z_1}^{z_2} G(\mathcal{P}', \mathcal{P}'_0) u_2(z_0) dz_0 dz' + \gamma_1(z) u_2(z) \right\} e^{-i \arg u_2(z)} \right] = 0$$

Із цих рівнянь знаходяться $u^0(\mathcal{K})$, $u_1^0(\mathcal{K})$, $u_2^0(z)$, а потім будувати $|u^0(\mathcal{K})|$, $|u_1^0(\eta)|$, $|u_1^0(z)|$ - відповідно. Взагалі рівняння нелінійні і їх розв'язки знаходяться методом послідовних наближень.

2.3 Чисельні розв'язки задач

2.3.1 Задача амплітудно-фазового керування з параболічним наближенням

2.3.1.1 Різницеві схеми для рівнянь параболічного типу

Одномірне рівняння теплопровідності (рівняння дифузії) є параболічним рівнянням в частинних похідних. Розглянемо змішану задачу для однорідного

рівняння теплопровідності. Задача полягає в знаходженні функції $U(x, t)$, що задовольняє в області $D = \{(x, t); 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рівнянню

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

де $\alpha - \text{const} > 0$

початковій умові

$$U(x, 0) = f(x) \quad (3.2)$$

і крайовим умовам першого роду

$$U(0, t) = \mu_1(t), \quad U(l, t) = \mu_2(t) \quad (3.3)$$

До задачі (3.1)-(3.3) приводить, зокрема, задача про розповсюдження тепла в однорідному стрижні довжиною l , на кінцях якого підтримується заданий температурний режим. Крайові умови другого і третього роду в даній задачі не розглядаються. Заміна змінних $t \rightarrow \frac{t}{l}$ приводить рівняння (3.1) до виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

тому в подальшому будемо вважати $\alpha = 1$.

Побудуємо в області D рівномірну прямокутну сітку з кроком h у напрямку x і кроком l - в напрямку t .

Позначимо вузли сітки через $(x_0, t_0), \dots, (x_i, t_n), \dots$, а наближені значення функції $U(x, t)$ в цих вузлах - U_i^{n+1} . Тоді

$$x_i = ih, \quad i=0, 1, \dots, n, \quad h=l/n; \quad t_n = n l, \quad n=0, 1, \dots, m, \quad l = T/m.$$

Аппроксимуємо рівняння (3.1) на чотирьох точковому шаблоні, який зображено на рисунку 2.1 жирними лініями.

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

У результаті отримуємо неявну двошарову схему:

$$rU_{i+1}^{n+1} - (1+2r)U_i^{n+1} + rU_{i-1}^{n+1} = -U_i^n, \quad (3.4)$$

яка аппроксимує рівняння (3.1) з похибкою $o(\square h^2)$.

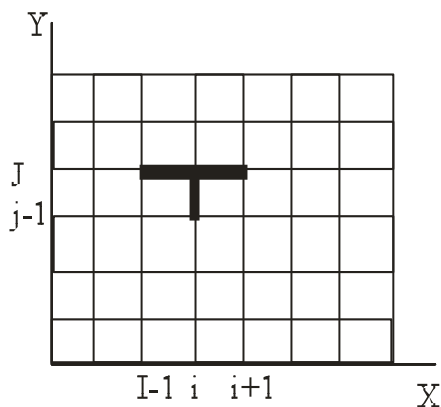


Рисунок 2.1

Схема (3.4) аппроксимує рівняння (3.1) тільки у внутрішніхх вузлах сітки, тому число рівнянь у схемі (3.4) менше числа невідомих U_i^{n+1} . Рівняння яких не вистачає отримують із крайових умов

$$U_0^n = \mu_1(t_n), \quad U_N^n = \mu_2(t_n) \quad (3.5)$$

Схема (3.4)-(3.5) неявна, тому значення U_i^{n+1} знаходять як розв'язок системи лінійних рівнянь (3.4). Для розв'язку системи (3.4) можна застосувати будь-який алгоритм розв'язку систем лінійних рівнянь, однак система (3.4) має трьохдіагональну матрицю і найбільш раціонально розв'язувати її методом прогонки. Таким чином, розв'язавши систему різницьових рівнянь, знайдемо значення функції U на часовому шарі $n+1$, якщо відомий розв'язок на часовому шарі n .

Отже, алгоритм чисельного розв'язку задачі має наступний вигляд.

На нульовому часовому шарі ($n = 0$) розв'язок відомий з початкової умови $U_i^0 = f(x_i)$.

На кожному наступному шарі шукана функція визначається як розв'язок системи (3.4)-(3.5).

Помітною властивістю неявної схеми (3.4) є її стійкість при будь-яких значеннях параметру $h^2 > 0$. Переваги схеми (3.4) особливо відчутні при порівнянні з явною схемою, яка отримується при апроксимації рівняння (3.1) на шаблоні, зображеному на рисунку 2.2

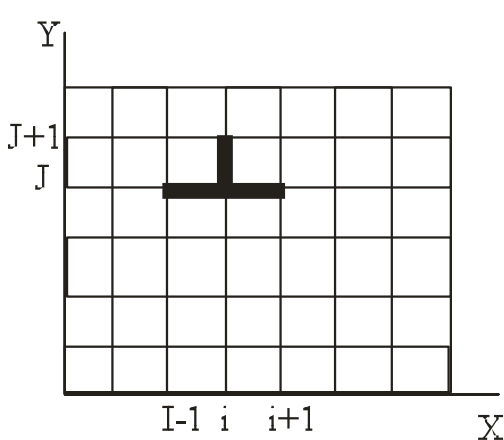
$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$


Рисунок 2.2

Явна схема виявляється стійкою лише при $r \leq 1/2$, тобто при $\tau \leq h^2 / 2$. Це означає, що обчислення за явною схемою доведеться вести з дуже малим кроком, що може призвести до великих витрат машинного часу.

У неявній схемі обчислення на одному кроці вимагають більше операцій, ніж у явній схемі, проте величину кроку по часу можна вибирати як завгодно великою без ризику порушити стійкість схеми. Все це дозволяє значно зменшити машинний час, необхідний для розв'язку задачі. Схема (3.4) збігається. Це означає, що при $h, \tau \rightarrow 0$, розв'язок різницевої задачі (3.4)-(3.5) наближається до точного розв'язку змішаної задачі (3.1)-(3.3)

2.3.1.2 Постановка задачі

$$c(r, z) = 1470 \frac{m}{s}, \quad c_0 = 1500 \frac{m}{s}, \quad H = 300m, \quad f = 100Hz, \quad r_0 = 150m, \quad R = 1km$$

$$n(r, z) = \frac{c_0}{c(r, z)}, \quad k_0 = \frac{2\pi \cdot f}{c_0}, \quad v(r, z) = 0$$

$$\frac{d}{dr} p(r, z) = \frac{-1}{2ik_0} \left[\frac{d^2}{dz^2} p(r, z) + k_0^2 (n(r, z) - 1 + i v(r, z)) \right]$$

Функціонал що мінімізується:

$$I_1 = \beta \int_0^H \left(|p(r, Z) - pz(z)| \right)^2 dz + \gamma \int_0^H \left(|u(z)| \right)^2 dz, \quad \beta = 1, \gamma = 0.1$$

$$grad I = \psi(r_0) + 2 \cdot \gamma \cdot u$$

Ψ - розв'язок спряженої задачі з крайовою умовою
 $\psi(z, R) = 2 \cdot \beta \cdot (p(z, R) - pz(z))$

Керування:

Амплітудно-фазове, необмежене

Задане поле:

$$M = H \frac{k_0}{\pi}, \quad M = 40, \quad H01(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot kr}} \cdot e^{i(kr - \frac{\pi}{4})}, \quad z_0 = 150m, \quad n = 1, 2, \dots, M$$

$$\xi_n = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n \cdot \pi}{H}\right)^2}, \quad k_0 = 0.419m^{-1}$$

$$pz(z, r) = \frac{i}{2H} \sum_{n=1}^M \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z_0}{H}\right) \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z}{H}\right) \cdot H01(k_0 \cdot r)$$

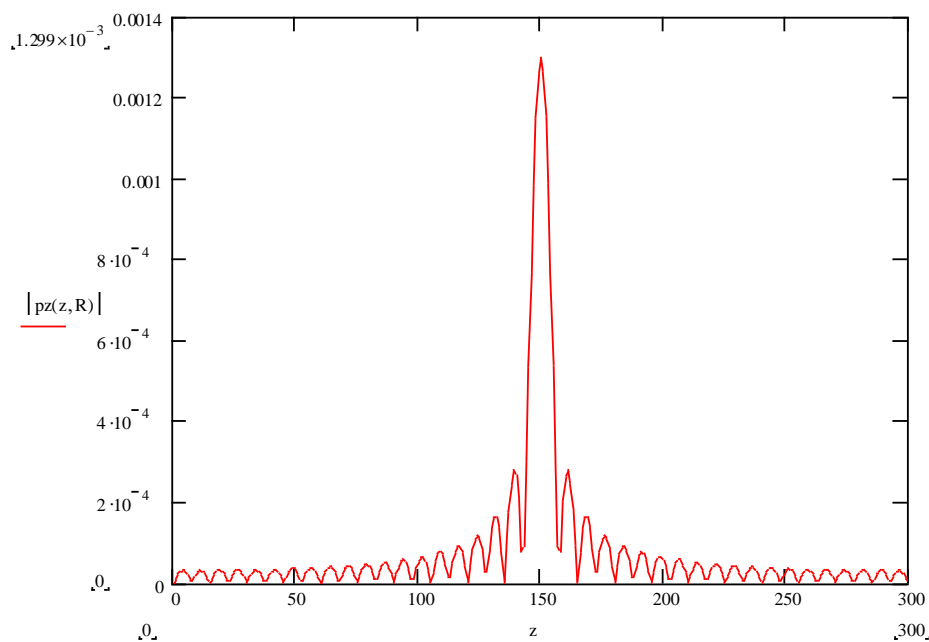


Рисунок 2.3

Різницева схема:

$$2ik_0 \frac{P_{zk, rk+1} - P_{zk, rk}}{\tau} + \frac{P_{zk-1, rk+1} - 2P_{zk, rk+1} - P_{zk+1, rk+1}}{h^2} = -k_0^2 (n(r, z) - 1 + i\nu(r, z)) p_{zk, rk+1}$$

Параметри дескритизації:

$$h = 1m, \tau = 0.05, \quad N_z = \frac{H}{h}, N_r = \frac{(R - r_0)}{\tau}, \quad N_z = 300, \quad N_r = 1.7 \cdot 10^4$$

2.3.1.3 Розв'язок

Оптимізація:

Область необмежена, використовуємо метод градієнтного спуску.

Протокол програми градієнтного спуску:

I=326.77769949

lam=1.00000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=466.43258201

lam=0.50000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=3.53186291

I=3.53186291

lam=1.00000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=4.68582616

lam=0.50000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=0.22103122

I=0.22103122

lam=1.00000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=0.13301794

I=0.13301794

lam=1.00000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=0.11580821

I=0.11580821

lam=1.00000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=0.12406263

lam=0.50000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=0.04135236

I=0.04135236

lam=1.00000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=0.02624003

I=0.02624003

lam=1.00000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=0.01743594

I=0.01743594

lam=1.00000000+0.00000000i I(u-lam*gradI)=0.01237357

$I=0.01237357$

$\text{lam}=1.00000000+0.00000000i$ $I(u-\text{lam}*\text{grad}I)=0.00970188$

$I=0.00970188$

$\text{lam}=1.00000000+0.00000000i$ $I(u-\text{lam}*\text{grad}I)=0.00869958$

$I=0.00869958$

$\text{lam}=1.00000000+0.00000000i$ $I(u-\text{lam}*\text{grad}I)=0.00902412$

$\text{lam}=0.50000000+0.00000000i$ $I(u-\text{lam}*\text{grad}I)=0.00413425$

$I=0.00413425$

$\text{lam}=1.00000000+0.00000000i$ $I(u-\text{lam}*\text{grad}I)=0.00305020$

$I=0.00305020$

$\text{lam}=1.00000000+0.00000000i$ $I(u-\text{lam}*\text{grad}I)=0.00238016$

$I=0.00238016$

$\text{lam}=1.00000000+0.00000000i$ $I(u-\text{lam}*\text{grad}I)=0.00197607$

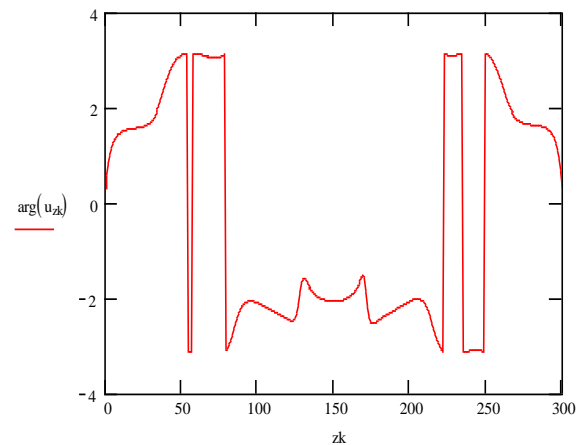
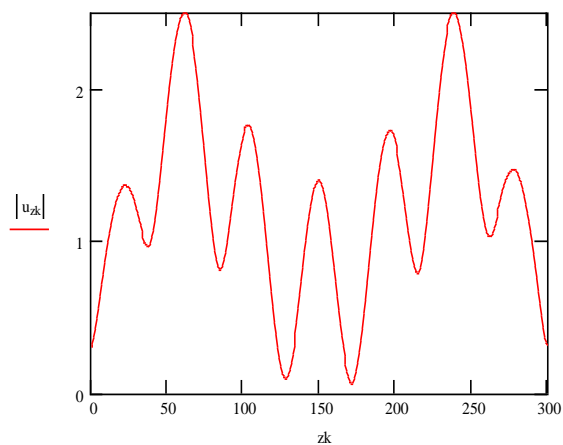


Рисунок 2.4 Отримане оптимальне керування

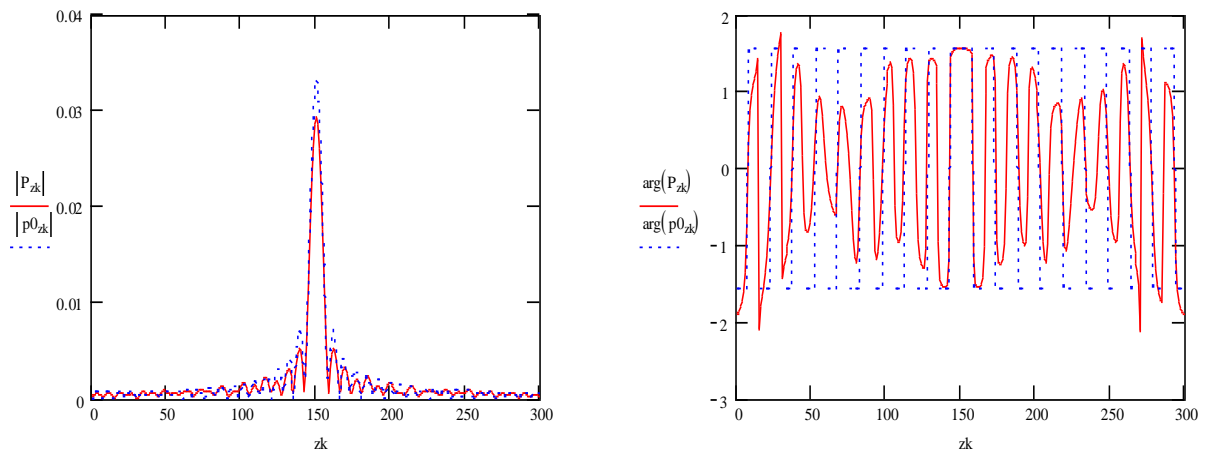


Рисунок 2.5 Порівняння $p(z, R)$ з $p_z(z)$

2.3.2 Задача амплітудного керування

2.3.2.1 Постановка задачі

Методом проекції градієнта розв'язати задачу амплітудного керування

$$\min_{u \in U} I(u) = \int_0^H \beta(x) \left(|P(R, x)| - |P_0(x)| \right)^2 dx + \int_0^H \gamma(x) |u(x)|^2 dx$$

$$u \in U = \{u : \alpha_1(x) \leq u \leq \beta_1(x)\}, \quad hP = 0, \quad h = 2ik_0 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 (u^2(r, x) - 1 + i\nu \cdot (r, x))$$

$$r_0 < r \leq R < \infty, \quad 0 \leq x \leq H, \quad P|_{x=0} = P|_{x=H}, \quad P|_{r=r_0} = u(x)$$

k_0 – задане число, n^2 та ν – задані функції,

$$u = u_1 + iu_2 = |u| e^{i \arg u} = |u| e^{i\nu}$$

Задача амплітудного керування полягає у відшуванні такого $|u|$, яке б мінімізувало функціонал $I(u)$, при умові виконання відповідних обмежень. Задача розв'язується наступним чином.

З диференційного рівняння

$$\left(2ik_0 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 (u^2(r, x) - 1 + i\nu \cdot (r, x)) \right) p(r, x, u) = 0$$

знаходимо $p(r, x, u)$, за умов

$$r_0 < r \leq R < \infty, \quad 0 \leq x \leq H, \quad P|_{x=0} = P|_{x=H}, \quad P|_{r=r_0} = u(x)$$

Далі знаходимо градієнт $I(u)$.

Для задачі амплітудного керування маємо формулу

$$I'(u) = \operatorname{Re}(e^{i\varphi} \bar{\psi}) + 2\gamma \operatorname{Re}(e^{i\varphi} \bar{u})$$

де $\bar{\psi}(r, x, u)$ – розв’язок спряженої до $hP = 0$ задачі. При розв’язанні спряженої задачі задаються різні початкові умови в залежності від знайденого розв’язку P :

$$\bar{\psi} = 2\beta(x) \left(|P(u)| - |P_0| \right) e^{-i \arg P(u)}$$

Метод проекції градієнта полягає в тому, що вибирається деяке початкове наближення u_0 . Потім наступне наближення знаходиться за правилом

$$u_{n+1} = \operatorname{Pr}_U (u_n - \alpha_n I'(u_n))$$

де Pr_U – проекція на простір U . Ітерація продовжується доки не буде виконуватися один з критеріїв

$$\|u_n - u_{n-1}\| \leq \varepsilon \quad \text{або} \quad \|I(u_n) - I(u_{n-1})\| \leq \varepsilon$$

де ε - наперед задане мале число.

Хочемо отримати Функцію наступного вигляду:

$$pz(x, R) = \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{H} \cdot \left[\sin\left[\frac{n \cdot \pi \cdot x}{H}\right] \sin\left[\frac{n \cdot \pi \cdot 667}{H}\right] + \sin\left[\frac{n \cdot \pi \cdot x}{H}\right] \sin\left[\frac{n \cdot \pi \cdot 1333}{H}\right] \right]$$

де $H = 2$ км

$R = 4$ км

$h = 20$ м (крок дискретизації),

Дискретизація по горизонталі **8 м**

$k_0 = 0.03$

Рисунок 2.6 Графік $pz(x, R)$

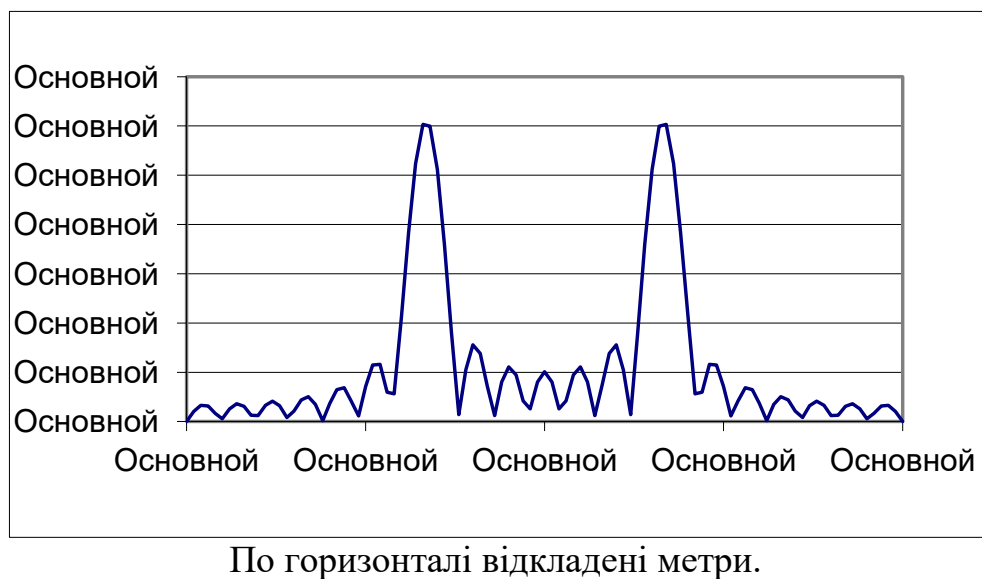


Схема різниць для розв'язку диференційного рівняння

$$2ik_0 \frac{P_{zk, rk+1} - P_{zk, rk}}{\tau} + \frac{P_{zk-1, rk+1} - 2P_{zk, rk+1} - P_{zk+1, rk+1}}{h^2} = -k_0^2 (n(r, z) - 1 + i\nu(r, z)) p_{zk, rk+1}$$

2.3.2.2 Розв'язок

Крок ітерації та норма градієнта функціонала

1	2,89833
2	3,93784
3	3,90809
4	3,90163
5	3,81018
6	3,80639
7	3,68673
8	3,59115
9	3,07328
10	2,21423
11	1,26643
12	0,559514
13	0,186002
14	0,0461499
15	0,0134057
...	
120	1,11947e-005
121	1,09009e-005
122	1,06172e-005
123	1,03432e-005
124	1,00785e-005
125	9,82257e-006



Рисунок 2.7 Оптимальне керування. По горизонталі в метрах.

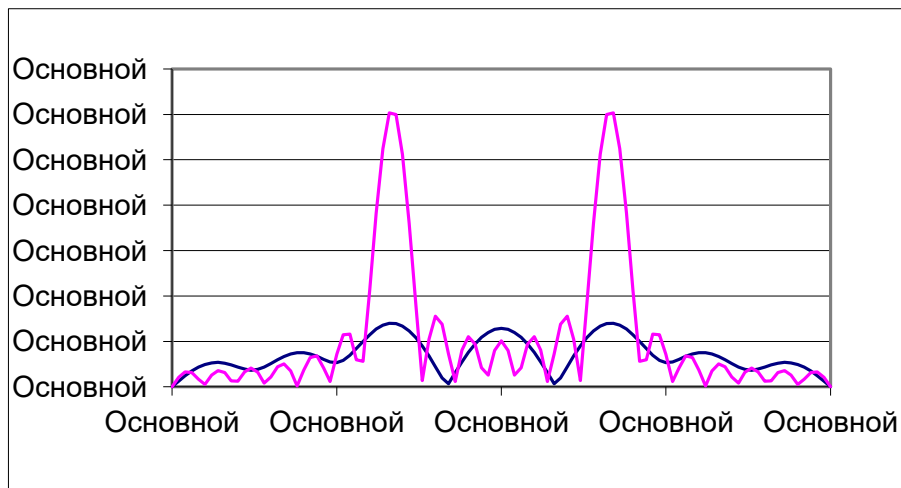


Рисунок 2.8 –Порівняння бажаних значень і отриманих з допомогою оптимального керування.

На малюнку порівняння фіолетовим (лінія з більш високими піками) зображено бажані значення, синім отримані за допомогою оптимального керування.

Зупинка відбувається за наступним критерієм:

$$\|grad I(u_n)\| \leq 10^{-5}$$

РОЗДІЛ 3 РОЗРОБЛЕННЯ СТАРТАП-ПРОЕКТУ

3.1 Опис ідеї проекту

Опис ідеї стартап проекту описано в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Опис ідеї стартап-проекту

Зміст ідеї	Напрямки застосування	Вигоди для користувача
Створення системи підтримки прийняття рішень для підприємств роздрібної торгівлі на основі методів інтелектуального аналізу даних	Рекламна діяльність	Збільшення прибутків підприємства
	Управління медіаресурсами	Вдале розміщення рекламного контенту

Сильні, слабкі та нейтральні характеристики ідеї проекту зображено в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Визначення характеристик ідеї проекту

П/П	Техніко-економічні характеристики ідеї	(Потенційні) товари/концепції конкурентів			W (слабка сторона)	N (нейтр. сторона)	S (сильна сторона)
		FS	S ales oft	L an. Anal yt.			
.	Універсальний формат даних		+		+		
.	АВС-аналіз		+				+

Продовження таблиці 3.2

.	Моделювання і прогнозування		+			+	
.	Відомість бренду		-		+		

3.2 Технологічний аудит ідеї проекту

Технологічний аудит ідеї проекту наведений у таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Технологічна здійсненність ідеї проекту

№ п/п	Ідея проекту	Технології її реалізації	Наявність технологій	Доступність технологій
1	Попередній ABC-аналіз	R	Технологія наявна і не потребує змін. Потрібно реалізувати алгоритм.	Технологія загальнодоступна
2	Моделювання та прогнозування	R	Необхідно реалізувати моделі: AR, ARMA, ARIMA	Технологія загальнодоступна
Обрана технологія реалізації ідеї проекту: для реалізації проекту обрана мова програмування R				

3.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Характеристика потенційного ринку стартап-проекту наведена у таблиці 3.4.

Таблиця 3.4 – Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

п/п	Показники стану ринку (найменування)	Характеристика
	Кількість головних гравців, од	4
	Загальний обсяг продаж, грн/ум.од	1000 ум.од
	Динаміка ринку (якісна оцінка)	Зростає
	Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень)	Немає
	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	Немає
	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	20%

Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту наведена в таблиці 3.5.

Таблиця 3.5 – Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

№ п/п	Потреба, що формує ринок	Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)	Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів	Вимоги споживачів до товару
1	Прогнозування та передбачення потреб користувачів у роздрібній торгівлі	Середній та великий бізнес, що застосовують системи керування ресурсів підприємства	ERP система підприємства, розміри оброблюваних даних, технічні обмеження	Ефективність прогнозування Швидка обробка даних Оптимальне використання ресурсів

Можливі загрози для стартап-проекту наведені у таблиці 3.6.

Таблиця 3.6 – Фактори загроз

№ п/п	Фактор	Зміст загрози	Можлива реакція компанії
1	Невпорядкованість і неповнота даних	Клієнтські бази можуть містити невпорядковані дані і також певні дані можуть бути відсутніми	Додавання модуля попередньої обробки даних

Продовження таблиці 3.6

2	Нестача технічних ресурсів	Клієнти можуть мати обмежені локальні технічні ресурси, недостатні для повноцінної роботи системи	Винесення модуля обчислення на сервери компаній-партнерів
---	----------------------------	---	---

Фактори можливостей наведені у таблиці 3.7.

Таблиця 3.7 – Фактори можливостей

№ п/п	Фактор	Зміст можливості	Можлива реакція компанії
1	Хмарні обчислення	Можливість виконання усіх обчислень на віддалених серверах	Пристосування модулів обчислення для роботи на сервері
2	Коригування прогнозу	Можливість коригування прогнозу в режимі реального часу на основі власної бази даних та спорідненої інформації з інтернету	Розробка модулів інтеграції з google analytics, оптимізація застосунку для можливості роботи в реальному часі

Проведений ступеневий аналіз конкуренції на ринку зображено у таблиці 3.8.

Таблиця 3.8 – Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

Особливості конкурентного середовища	В чому проявляється дана характеристика	Вплив на діяльність підприємства (можливі дії компанії, щоб бути конкурентоспроможною)
1. Вказати тип конкуренції - олігополія	Присутня невелика кількість фірм. Більшість ринку контролюють фірми-гіганти	Впровадження технологічних інновацій. Кооперація з дослідницькими центрами. Розширення функціоналу та задоволення потреб клієнтів.
2. За рівнем конкурентної боротьби - глобальний	Продукція не залежить від країни чи локалізації клієнта	
3. За галузевою ознакою внутрішньогалузева	Продукт спрямований на роздрібну торгівлю	
4. Конкуренція за видами товарів: - за бажанням	Полягає у випередженні задоволення бажань клієнта	

Продовження таблиці 3.8

5. За характером конкурентних переваг - нецінова	Переваги передбачають собою ефективність та різноманіття функціоналу	
6. За інтенсивністю - не марочна	Торгова марка майже немає впливу	

Проведений аналіз конкуренції в галузі зображено у таблиці 3.9.

Таблиця 3.9 – Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

Складові аналізу	Прямі конкуренти в галузі	Потенційні конкуренти
	SalesLoft, IBM, Planning Analytics	SlickPie
Висновки	Контролюють велику частину ринку, мають узагальнені рішення	Спрямовані на малий бізнес, не мають локалізацій для більшості країн Європи

Фактори конкурентоспроможності та їх обґрунтування наведені в таблиці 3.10.

Таблиця 3.10 – Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)
1	Інновації	Інноваційні рішення мають забезпечити перевагу нашим клієнтам над конкурентами
2	Функціонал	Функціонал повинен покривати вирішення необхідних задач клієнтів
3	Цінова політика	Вартість продукту відіграє велику роль при виборі системи клієнтом
4	Ресурсоємність	Великі затрати технічних ресурсів можуть спровокувати необхідність залучення додаткових коштів

Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін проекту відображено у таблиці 3.11.

Таблиця 3.11 – Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін RFS

п/п	Фактор конкурентоспроможності	Бали 1-20	Рейтинг товарів-конкурентів у порівнянні з RFS						
			3	2	1		1	2	3
	Інновації	2							
	Функціонал	8							
	Цінова політика	7							
	Ресурсоемність	0							

SWOT-аналіз проекту наведено в таблиці 3.12.

Таблиця 3.12 – SWOT-аналіз стартап-проекту

Сильні сторони: розумна цінова політика, функціонал забезпечує рішення більшості задач клієнта	Слабкі сторони: відсутність співпраці з інноваційними центрами, велика ресурсоемність
Можливості: впровадження інноваційних рішень, оптимізація роботи продукту	Загрози: неоптимізована робота продукту, узагальнені рішення, що непридатні для вирішення клієнтських задач

Альтернативи ринкового впровадження проекту розглянуто в таблиці 3.13.

Таблиця 3.13 – Альтернативи ринкового впровадження стартап-проекту

№ п/п	Альтернатива (орієнтовний комплекс заходів) ринкової поведінки	Ймовірність отримання ресурсів	Строки реалізації
1	Спеціалізовані рішення	Висока	6-9 місяців
2	Хмарний сервіс	Висока	9-12 місяців
3	Узагальнення рішення, вихід на нові сфери ринку	Середня	12-15 місяці

3.4 Розроблення ринкової стратегії проекту

Опис та вибір цільових груп потенційних клієнтів зображено в таблиці 3.14.

Таблиця 3.14 – Вибір цільових груп потенційних споживачів

п/п	Опи с цільової групи потенційни х клієнтів	Готовність споживачів сприйняти продукт	Ор ієнтовний попит в межах цільової групи	Інте нсивність конкуренці ї в сегменті	Про стота входу у сегмент
	Мал ий бізнес	Низька готовність, через необхідність вкладання великих коштів.	Ни зький попит	Сер едня	Вхід в сегмент складний

Продовження таблиці 3.14

	Середній бізнес	Середня готовність. В залежності від виду бізнесу, готовність різниться.	Середній попит	Вище середньої	Вхід в сегмент достатньо складний
	Великий бізнес	Абсолютна готовність. Більшість компаній такого рівня застосовували чи планують застосовувати інтелектуальні системи прогнозування, тому повністю готові розглянути альтернативні рішення	Високий попит	Середня	Вхід в сегмент складний
Які цільові групи обрано: 2,3					

В таблиці 3.15 зображено вибір базової стратегії розвитку.

Таблиця 3.15 – Визначення базової стратегії розвитку

п/п	Обрана альтернатива розвитку проекту	Стратегія охоплення ринку	Ключові конкурентоспро можні позиції відповідно до обраної альтернативи	Базова стратегія розвитку
	Розробка та створення додаткових функціональних модулів	Таргетні пропозиції бізнесу, проведення презентації функціональн их рішень на ярмарках та конференціях	Відсутніст ь аналогічних до новостворених функціональних модулів у конкурентів	Розробка та удосконалення існуючих модулів на основі потреб ринку та інформації від клієнтів

В таблиці 3.16 наведено визначення базової стратегії конкурентної поведінки.

Таблиця 3.16 – Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

№ п/п	Чи є проект «першопрохідцем» на ринку?	Чи буде компанія шукати нових споживачів, або забирати існуючих у конкурентів?	Чи буде компанія копіювати основні характеристики товару конкурента, і які?	Стратегія конкурентної поведінки
1	Ні	Можливі обидва варіанти	Стандартні функціональні модулі будуть виконувати схожі функції, що і конкуренти	Унікальна цінова політика, функціональні інновації

В таблиці 3.17 наведено визначення стратегії позиціонування.

Таблиця 3.17 – Визначення стратегії позиціонування

п/п	Вимоги до товару цільової аудиторії	Базова стратегія розвитку	Ключові конкурентоспро можні позиції власного стартап-проекту	Вибір асоціацій, які мають сформувати комплексну позицію власного проекту (три ключових)
	Висока якість прогнозування в клієнтській сфері застосування	Розробка та удосконалення існуючих модулів на основі потреб ринку та інформації від клієнтів	Спеціалізо вані рішення, хмарні сервіси	Прогнозуван ня, передбачення, аналіз

3.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

В таблиці 3.18 представлені ключові переваги концепції потенційного товару.

Таблиця 3.18 – Визначення ключових переваг концепції потенційного товару

№ п/п	Потреба	Вигода, яку пропонує товар	Ключові переваги перед конкурентами (існуючі або такі, що потрібно створити)
1	Широкий функціонал	Вирішення задач	Забезпечує вирішення більшої кількості задач бізнесу
2	Спеціалізовані рішення	Вирішення задач	Забезпечує більш ефективне вирішення задач у звуженій сфері застосування
3	Технічні ресурси	Хмарні сервіси	Дозволяє користуватись рішенням за рахунок віддалених технічних потужностей

Опис трьох рівнів моделі товару відображено у таблиці 3.19.

Таблиця 3.19 – Опис трьох рівнів моделі товару

Рівні товару	Сутність та складові		
I. Товар за задумом	Обробка, аналіз даних. Прогнозування та передбачення потреб споживача		
II. Товар у реальному виконанні	Властивості/характери стики	М/ Нм	Вр/Тх /Тл/Е/Ор
	1. Швидкодія	Нм	Тх/Тл/Е
	2. Ефективність	Нм	Тх/Тл
	3. Користувацький інтерфейс	Нм	Е
	Якість: стандарти відповідні до законодавства. Створені функціональні скріпти.		
	Пакування: Власний сайт		
III. Товар із підкріпленням	До продажу: застосунок для інтеграції в існуючі системи керування підприємством для прогнозування та передбачення потреб споживачів на основі великих масивів даних		
	Після продажу: Швидкодія, ефективність, легкість у користуванні		
	Закритий код. Захищений від можливості декомпіляції.		

Визначення меж встановлення ціни показано в таблиці 3.20.

Таблиця 3.20 – Визначення меж встановлення ціни

№ п/п	Рівень цін на товари- замінники	Рівень цін на товари- аналоги	Рівень доходів цільової групи споживачів	Верхня та нижня межі встановлення ціни на товар/послугу
1	-	200\$/міс	Рівень доходів підприємств надзвичайно високий	150-200\$/міс

Формування системи збуту зображено в таблиці 3.21.

Таблиця 3.21 – Формування системи збуту

№ п/п	Специфік а закупівельної поведінки цільових клієнтів	Функції збуту, які має виконувати постачальник товару	Глибин а каналу збуту	Оптимальн а система збуту
	Таргетні пропозиції для компаній	Презентац ії функціоналу	-	-

Концепція маркетингових комунікацій відображена у таблиці 3.22.

Таблиця 3.22 – Концепція маркетингових комунікацій

№ п/п	Специфіка поведінки цільових клієнтів	Канали комунікацій, якими користуються цільові клієнти	Ключові позиції, обрані для позиціонування	Завдання рекламного повідомлення
1	Середній бізнес – оптимальні рішення за невисоку ціну	Соціальні мережі, внутрішньо ринкова комунікація	Прогнозування покупок споживача	Короткий опис переваг продукту, заохочення дізнатись більше
2	Великий бізнес – повноцінні рішення для покращення продажів	Таргетні дзвінки до клієнтів	Прогнозування покупок споживача	Донести інформацію про оптимальність рішення для бізнесу клієнта

Висновки за розділом 3

Отже, відповідно до вищенаведених результатів, можна стверджувати про наявність попиту на запропоновану систему. Варто зауважити, що на ринку присутня сильна конкуренція, але інноваційна складова продукту дозволяє суттєво збільшити конкурентоспроможність проекту. Подальша імплементація проекту доцільна за умови фокусування на середній та великий бізнес, оскільки саме цей ринок динамічно зростає і є достатньо рентабельним.

ВИСНОВКИ

1.Проведено системний аналіз моделей океанічних хвильоводів та зроблено постановки задач оптимізації для кожного з них на основі відповідного рівняння Гельмгольца.

2.В роботі розглянуто три найбільш вживаних критеріїв якості створюваних акустичних полів.Критерії якості вибираються у вигляді середньоквадратичних відхилень, створюваних акустичних полів від заданих, середньоквадратичних відхилень створюваних модулів акустичних полів від заданих та середньоквадратичних відхилень створюваних інтенсивностей акустичних полів від заданих .

3.Для кожного з розглянутих критеріїв розв'язані задачі амплітудно-фазового, амплітудного та фазового синтезу гідроакустичних антен.

4. При відсутності та наявності обмежень побудовані відповідні алгоритми розв'язування вказаних задач, що базуються на методах градієнтного спуску, умовного градієнту та проєкції градієнту.

5.Описана процедура розв'язування вказаних задач на основі параболічного наближення оператора Гельмгольца

6.На основі параболічного наближення зроблені чисельні розрахунки в задачах амплітудно-фазового та фазового синтезу лінійних неперервних антен.'.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Шарфарец Б.П. Поле протяженного направленного излучателя в регулярном океаническом волноводе //Акуст.журн. 1989. Т.35. №1. С. 132-137
2. Коддингтон Э.А., Левинстон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958
3. Алексеев Г.В. Математические основы акустики океана. Владивосток: Изд-во ДВГУ , 1988. 228 с.
4. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.
5. Osborn M.R. On the propagation of sound in a layered fluid medium
// Quart. J. Mech. Appl. Math. 1960. V. 13. №4 P. 472-486
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики М.: Наука, 1981. 512 с.
7. Шарфарец Б.П. Поле направленного излучателя в слоисто-неоднородном волноводе // Акуст.журн. 1985. Т. 31. №1. С. 119-125
8. Hall M. Normal-mode theory: The role of the branch-line integral in Pederson-Gordon type models // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. V. 72. №6 P. 1978-1987
9. М.В.Федорюк. О гашении звука в волноводах активным методом. Акуст.ж., 1975, 21, 2, 281-285
10. M. Swinbanks. The active control of sound propagation in long ducts. J. sound and vibration, 1973, 27, 3, 411-436
11. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. гл. IX, М., «Наука», 1974
12. Бреховских Л.М., Волны в слоистых средах //М.:Изд. АН СССР, 1957.- 502 с.
13. Наконечный А.Г., Данилов В.Я., Ляшко В.И. Оптимизационные методы в задачах гидроакустики. - Киев, 1984 -41 с. (Препринт/ АН УССР, Ин-т кибернетики; 84-31).
14. Данилов В.Я., Квасюк О.П. Задача мінімаксного оцінювання гармонічних за часом звукових полів на основі векторних вимірів //Системні технології.

- Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 1(18).- Дніпропетровськ, 2002. С.125-133.
15. Подлипенко Ю.Г. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в некоторых областях с бесконечными границами // Препринт 90-47, ин-т математики АН УССР, 1990, - 59с.
 16. Згуровский М.З., Демченко А.М., Новиков А.И., Коваленко И.И. Системный анализ в исследованиях физических процессов и полей. – Киев, 1993, -37 с. (Препр. / АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 93-30)
 17. Данилов В.Я., Жиров О.Л., Квасюк О.П. Розробка математичних моделей та методів оптимізації в гідроакустиці. В ювілейному збірнику наукових праць під редакцією академіка Згуровського М.З. "Сучасні інформаційні технології та системний аналіз – шлях до інформаційного суспільства", присвяченому 10-річчю кафедри Математичних методів системного аналізу ІПСА НТУУ (КПІ). Київ, 1998, с.105-110.
 18. Подводная акустика и обработка сигналов: Пер. с англ./ Под ред. Л. Бьёрнё. -М.: Мир, 1985, - 488 с.
 19. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки. Перев. с англ.-М.: Радио и связь, 1986.-448 с.
 20. Об управлении волновыми полями в волноводах. / В.И. Грачев, В.Я. Данилов, Ю.И. Кравцов и др. -М.: 1984, 28с. (препринт АН СССР, физический институт: 163).
 21. Таланов В.И. О синтезе антенн в многомодовых волноводах // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. т.28 № 7. с. 872-879.
 22. Данилов В.Я. Наконечный А.Г. Задачи оптимизации волновых полей гидроакустике. Выч. тех. и киб. - 1988, № 77, с. 100-106.
 23. Данилов В.Я. Задачи управления для параболического управления в акустике // Тез. доклад 4-й Республ. конф. Проблемы гид-ки в освоении

Мирового океана. - Часть 1. - Киев. 1987. - С. 69-70.

24. Данилов В.Я. Некоторые оптимизационные задачи для параболического управления в акустике // Киб. и вычислительная техника. - 1990.- с. 87-93.
25. Данилов В.Я., Кравцов Ю.А., Наконечный А.Г. Математические аспекты управления гидроакустическими полями // Формирование акустических полей в океанических волноводах.: Труды АН СССР ИПФ. - Нижний Новгород, 1990. - с. 32-55.